

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI  
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА  
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON  
JURNALI

4  

---

2022

УЗБЕКСКИЙ  
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ

*Журнал под таким названием издается с января 1992 г.*

Ташкент – 2022

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Главный редактор* – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ  
*Заместитель главного редактора* – докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ  
*Ответственный секретарь* – PhD Н.А. НИШОНОВ

Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Мирсаидов М. д.т.н., проф., академик АН РУз (Ташкент)
Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Азимов Д. д.т.н., проф. (США)	Панахов Г.М. д.т.н., проф., член.-корр. НАНА (Баку)
Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва)	Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский)
Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент)	Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент)
Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент)
Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Сирожиддинов З. д.т.н., проф. (Самарканд)
Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США)	Тохиров Ш.М. к.ф.-м.н. (США)
Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург)	Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент)
Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)	Худайкулиев Р.Р. к.т.н. (Ташкент)
Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург)	Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент)
Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент)	Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)
Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва)	Хусанов Б.Э. д.т.н. (Ташкент)
Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва)	Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь)
Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент)	Эргашов М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., академик НАН КР (Ош)	Ювмитов А.С. PhD (Ташкент)
Мардонов Б.М. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган)
Матвеев В.П. д.т.н., проф., академик РАН (Пермь)	

*Адрес редакции:*

100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.  
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: + 99871 262-78-34

Факс: +99871 262-71-52

E-mail: [instmechofficial@gmail.com](mailto:instmechofficial@gmail.com)

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.  
Регистрационный номер 0050.

## ДИНАМИКА РОТОРА С УЧЕТОМ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ И УГЛОВОЙ ПОГРЕШНОСТИ ШАРОВОГО АВТОБАЛАНСИРОВОЧНОГО УСТРОЙСТВА

Мирсаидов М.М.<sup>1,2</sup>, Сидиков М.Х.<sup>3</sup>, Туражонов К.М.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>3</sup>Алмалыкский филиал Московского национального исследовательского технологического университета (НИТУ), Алмалык, Узбекистан

E-mail: theormir@mail.ru, mansur106@mail.ru, q.turajonov@gmail.com

**Аннотация:** Данная статья посвящена исследованию динамики роторов с учетом автобалансирующего устройства (АБУ). Решение задачи динамической балансировки неуравновешенного ротора с помощью шарового автобалансирующего устройства в настоящее время является актуальным. В статье предложена модель. Получены уравнения движения ротора с шаровым автобалансирующим устройством, которое обладает не только эксцентricностью относительно оси симметрии ротора, но и имеет горизонтальную ось вращения. В основу механической модели положена классическая модель Джеффкотта. Составлены уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа, а также определены условия существования стационарных движений. Выполнены аналитический и численный анализы условий существования стационарных движений в случае, когда АБУ имеет не только эксцентricность центра, но и угловую погрешность. Рассмотрены различные возможные случаи несбалансированных режимов, когда АБУ имеет два и более балансирующих шарика. В частном случае, при отсутствии углового вращения, полученные результаты совпадают с известными результатами.

**Ключевые слова:** автобалансирующее устройство; шарики; угловая погрешность; стационарное движение; эксцентricность; дисбаланс; инерционная сила.

**Введение.** Вопросу динамики ротора с автобалансирующими устройствами посвящено достаточное количество научных работ. В этих работах используются различные модели и методы для решения конкретных динамических задач, связанных с балансировкой ротора [1–12].

При этом в работах [1–7] получены основополагающие результаты, где рассматривается динамика движения неуравновешенного упругого ротора с учетом эксцентricности центра автобалансирующего устройства (АБУ), когда беговая дорожка балансирующих шаров представляет собой круговую или эллиптическую траекторию. В случае, когда имеет место круговая траектория, получены условия стационарного движения с различными расположениями шаров по беговой дорожке, исследованы вопросы устойчивости частного движения, а также несбалансированное прохождение области критических скоростей.

В случае, когда беговая линия балансирующих шаров представляет собой эллипс, показано, что полностью сбалансированный режим не реализуем, но несбалансированные устойчивые стационарные движения существуют. Рассмотрены также вопросы динамики ротора в различных режимах разгона.

Наряду с этим:

- в работе [8] проделан обширный инженерный анализ однодискового ротора с многорядным АБУ, при этом движение шаров по беговой линии определяется внешними демпфирующими силами, силами инерции и силами трения, а также эксцентricитетом АБУ;

- в работе [13] рассматривается динамический неуравновешенный ротор, оснащенный двухплоскостным шаровым АБУ. При этом обе обоймы АБУ насажены на вал ротора с некоторым эксцентricитетом. Получены уравнения движения системы в неподвижной и вращающейся системах координат, а также необходимые условия существования сбалансированного стационарного режима. Численным методом исследован несбалансированный режим движения ротора в случае, когда ротор вращается с постоянной и переменной угловой скоростью;

- в работе [14] рассматриваются динамические свойства массивного корпуса на прямое синхронное прецессионное движение неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы. Ротор представляет собой динамически симметричное твердое тело, установленное на линейно-упругом безмассовом валу. Рассмотрены нелинейные характеристики типа Герца и ДUFFинга. Показано, что существуют два дополнительных нелинейных

резонанса, связанных с динамикой массивного корпуса, расположение которых зависит от соотношения масс ротора и корпуса. Получены амплитудно-частотные характеристики симметричной гиперболоидальной прецессии. Показано, что самоцентрирования ротора не происходит и массивный корпус оказывает балансирующий эффект при определенной угловой скорости;

- в работе [15] рассматривается влияние внешних возбуждений на позиционирование шара в автоматическом шариковом балансире, установленном в роторной системе. Результаты моделирования показали, что балансировочные шарики могут уравновешивать внешнюю силу за счет изменения положения;

- в работе [16] исследован вопрос устойчивости многомассового автобалансирующего устройства пассивного типа, установленного на произвольную роторную машину. Получены уравнения возмущенного движения, а также показана возможность понижения порядка уравнений в независимых переменных для исследования устойчивости автобалансировки. Произведен анализ структуры системы уравнений движения. Рассмотрены особенности некоторых частных случаев;

- в работе [17] рассмотрены различные динамические режимы ротора Джеффкотта, представляющего собой тонкий жесткий диск, установленный посередине на безмассовый идеально упругий вал, вращающийся с угловой скоростью в жестких подшипниках;

- в работе [18] в рамках упрощенной теории роторных машин с автобалансирами со многими корригирующими грузами установлена структура и конкретизирован вид систем дифференциальных уравнений, описывающих движение роторной машины и процесс уравновешивания ротора автобалансирами. Установлено, что роторная машина условно состоит из нескольких взаимодействующих между собой частей – ротора и неуравновешенных автобалансиров;

- в работе [19] проведены аналитические и численные исследования уравнений движения несбалансированного гибкого вращающегося вала, оснащенного  $n$  шариками балансиром, в которых несбалансированные массы распределены по длине вала. Получены уравнения движения и проведен анализ устойчивости на основе линеаризованных уравнений возмущенного движения вокруг положения равновесия. В результате исследований предложена модель ротора Стодолы–Грина, вал которой считается гибким. Используя метод Лагранжа, получили нелинейные уравнения движения и исследовали балансирующий эффект рассматриваемой системы;

- в работе [20] проделан анализ двухплоскостного автоматического балансирующего устройства для жестких роторов. Получены автономные уравнения движения и исследованы бифуркации нарушения симметрии данной системы.

В вышеприведенных работах каждый подход и метод имеет свои преимущества и недостатки. Несмотря на это, все они принимаются при решении различных практических задач.

Здесь приведен обзор лишь некоторых работ по исследованию и решению различных задач, связанных с динамикой неуравновешенного ротора с автобалансирующим устройством. По постановке и полученным результатам в приведенных работах можно заметить неполноту исследований, особенно аналитических и численных анализов условий существования стационарных движений в случае, когда автобалансирующее устройство имеет не только эксцентricность центра, но также и угловые погрешности.

Поэтому данная работа посвящена разработке математической модели и методов для решения задачи динамической балансировки неуравновешенного ротора с помощью шарового автобалансирующего устройства, которое не только обладает эксцентricностью относительно оси симметрии ротора, но и имеет горизонтальную ось вращения.

## Методы.

**Физическая модель.** Рассматривается модель ротора в виде абсолютно твердого цилиндра, закрепленного по вертикальной продольной оси с помощью упругого вала на двух опорах (рис.1). В качестве математической модели принимается модель, рассмотренная в работе [1], с дополнением, что беговая линия может совершать вращательное движение вокруг определенной горизонтальной оси. Далее для удобства и сравнения сохраним обозначения параметров, введенные в работе [1], т.е. расстояние между геометрическим центром  $C$  и центром тяжести  $G$  цилиндра обозначим  $s_1$ . Для устранения дисбаланса внутри цилиндра установлено балансировочное устройство в виде круговой трубки с  $n$  шариками одинаковой массы. При этом трубка может вращаться вокруг горизонтальной оси, которая образует с осью  $CO_1$  угол  $\beta$ . Для учета эксцентрисичности центра балансировочного устройства введем параметры  $s_2$  и угол  $\gamma \leq \angle CO_1CG$  между направлениями  $CO_1$  и  $CG$  (см. рис. 1).

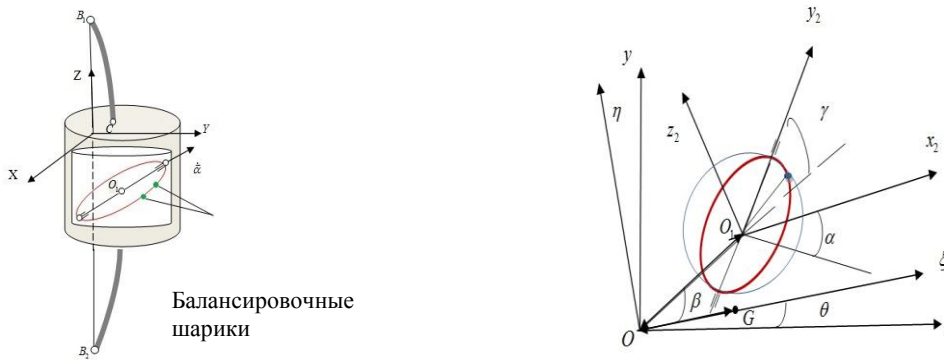


Рис.1. Расчетная схема автобалансирующего устройства

Для определения положения системы введем соответствующие координатные системы. Координатная система  $Oxyz$  – неподвижная, ось  $Oz$  проходит через неподвижные опоры и направлена вверх, а плоскость  $Oxy$  лежит в плоскости симметрии цилиндра. Координатная система  $O\xi\eta\zeta$  – подвижная, она вращается вместе с ротором, ось  $O\zeta$  совпадает с осью  $Oz$ , а остальные оси составляют правую систему координат. С трубкой балансировочной системы свяжем координатную систему  $O_1x_2y_2z_2$ , где ось  $O_1y_2$  направлена вдоль оси вращения трубки, а оси  $O_1x_2$  и  $O_1z_2$  образуют правую систему. Далее, для упрощения исследования будем предполагать, что цилиндр совершает плоское движение (в рамках модели Джеффкотта).

**Математическая модель.** Для составления математической модели используется уравнение Лагранжа. В данной модели система имеет  $n+4$  степеней свободы. В качестве обобщенных координат принимаются координаты  $x$  и  $y$  точки, угол поворота ротора  $\theta$ , угол  $\alpha$  между координатной плоскостью  $Oxy$  и плоскостью трубки, а также углы  $\varphi_i (i=1, \dots, n)$  для определения положений шариков внутри трубки.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{O_1}^2 + \frac{1}{2} (J_{y_2} \dot{\alpha}^2 + J_{x_2} \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + J_{z_2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i^2,$$

где  $\bar{v}_G = (\dot{x} - s_1 \sin \theta \dot{\theta}) \vec{i} + (\dot{y} + s_1 \cos \theta \dot{\theta}) \vec{j}$  – скорость центра масс цилиндра;

$\bar{v}_{O_1} = (\dot{x} - s_2 \sin(\theta + \gamma) \dot{\theta}) \vec{i} + (\dot{y} + s_2 \cos(\theta + \gamma) \dot{\theta}) \vec{j}$  – скорость центра масс балансировочного механизма;

$$\begin{aligned} \bar{v}_i = & (\dot{x} - s_2 \sin(\theta + \beta) \dot{\theta} - r \dot{\alpha} \cos \varphi_i \sin \alpha \sin \delta + r \dot{\varphi}_i (\cos \varphi_i \cos \delta - \sin \varphi_i \cos \alpha \sin \delta)) \vec{i} + \\ & + (\dot{y} + s_2 \cos(\theta + \beta) \dot{\theta} - r \dot{\alpha} \cos \varphi_i \sin \alpha \cos \delta + r \dot{\varphi}_i (\cos \varphi_i \sin \delta + \sin \varphi_i \cos \alpha \cos \delta)) \vec{j} + \\ & + (r \cos \varphi_i \dot{\alpha} - r \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i \sin \alpha) \vec{k}, \delta = \theta + \gamma + \beta; \end{aligned}$$

$\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, m_i$  – соответственно массы ротора, балансировочного устройства и массы шариков,  $J_G, J_{x_2}, J_{y_2}, J_{z_2}$  – моменты инерции относительно главных осей ротора и балансировочной системы;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – соответствующий базис вектора неподвижной координатной системы.

Кинетическая энергия системы через обобщенные координаты и их скорости примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \sum_{i=1}^n m_i)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(J_G + J_{z_2} \cos^2 \alpha + J_{y_2} \sin^2 \alpha + m_1 s_1^2 + \\
& \sum_{i=1}^n m_i (s_2^2 + r^2 (\sin^2 \varphi_i + \cos^2 \varphi_i \cos^2 \alpha) + 2rs_2 (\sin \varphi_i \cos \gamma + \cos \varphi_i \cos \alpha \sin \gamma)) \dot{\theta}^2 + \\
& + \frac{1}{2}(J_{x_2} + \sum m_i \cos^2 \varphi_i r^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r^2 \dot{\varphi}_i^2 + m_1 s_1 \dot{\theta} (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) + \\
& + \sum_{i=1}^n m_i ((s_2 \cos(\theta + \beta) + r \sin \varphi_i \cos \delta + r \cos \varphi_i \cos \alpha \sin \delta) \dot{y} - (s_2 \sin(\theta + \beta) + \\
& + r \sin \varphi_i \sin \delta - r \cos \varphi_i \cos \alpha \cos \delta) \dot{x} + s_2 r \sin \alpha \cos \gamma \cos \varphi_i \dot{\alpha}) \dot{\theta} + \\
& \sum_{i=1}^n m_i r \dot{\varphi}_i (\cos \varphi_i (\dot{y} \sin \delta + \dot{x} \cos \delta) + \sin \varphi_i \cos \alpha (\dot{y} \cos \delta - \dot{x} \sin \delta)) + \\
& + \sum_{i=1}^n m_i r \sin \alpha (\dot{y} \cos \delta - \dot{x} \sin \delta) \cos \varphi_i \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^n m_i r \dot{\theta} \dot{\varphi}_i (s_2 (\cos \varphi_i \sin \gamma + \sin \varphi_i \cos \alpha \cos \gamma) + \\
& + r \cos \alpha) + \sum_{i=1}^n m_i r^2 \sin \alpha \cos \varphi_i \dot{\alpha} \dot{\theta}.
\end{aligned}$$

С учетом потенциальной энергии упругого вала  $\Pi = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2)$  можно записать внешнюю диссипативную функцию в виде

$$F = \frac{1}{2} [c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c_\theta \dot{\theta}^2 + c_\varphi \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_i^2].$$

Обобщенные силы по переменным  $\alpha$  и  $\varphi_i$  уравнения движения системы в обобщенных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
(\widehat{m}_1 + \widehat{m}_2 + \sum_{i=1}^n m_i) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = & \frac{d}{dt} [(\widehat{m}_1 s_1 \sin \theta + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \sin(\theta + \gamma) + \\
& + r \sin \varphi_i \sin \delta - r \cos \varphi_i \cos \alpha \cos \delta)) \dot{\theta} - \sum_{i=1}^n m_i (\cos \varphi_i \cos \delta - \\
& - \sin \varphi_i \sin \delta \cos \alpha) r \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^n m_i r \dot{\alpha} \cos \varphi_i \sin \alpha \sin \delta], \\
(\widehat{m}_1 + \widehat{m}_2 + \sum_{i=1}^n m_i) \ddot{y} + c\dot{y} + ky = & - \frac{d}{dt} [(\widehat{m}_1 s_1 \cos \theta + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \cos(\theta + \beta) + \\
& + r \sin \varphi_i \cos \delta + r \cos \varphi_i \cos \alpha \sin \delta)) \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n m_i (\cos \varphi_i \sin \delta + \\
& + \sin \varphi_i \cos \delta \cos \alpha) r \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^n m_i r \dot{\alpha} \cos \varphi_i \sin \alpha \cos \delta],
\end{aligned} \tag{1}$$

$$H\ddot{\theta} + (c_\theta + \frac{dH}{dt})\dot{\theta} + \sum_{i=1}^n m_i [(s_2 \cos(\theta + \beta) + r \sin \varphi_i \cos \delta + r \cos \varphi_i \cos \alpha \sin \delta) \ddot{y} - (s_2 \sin(\theta + \beta) + r \sin \varphi_i \sin \delta - r \cos \varphi_i \cos \alpha \cos \delta) \ddot{x}] + m_1 s_1 (\ddot{y} \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i r \cos \varphi_i \sin \alpha (s_2 \cos \gamma + r \sin \varphi_i) \dot{\alpha} + r (s_2 (\cos \varphi_i \sin \gamma + \sin \varphi_i \cos \alpha \cos \gamma) + r \cos \alpha) \dot{\varphi}_i) = Q_\theta,$$

$$H = J_C + J_{z_2} \cos^2 \alpha + J_{y_2} \sin^2 \alpha + s_1^2 m_1 + \sum_{i=1}^n m_i (s_2^2 + r^2 (\sin^2 \varphi_i + \cos^2 \varphi_i \cos^2 \alpha) + 2rs_2 (\sin \varphi_i \cos \gamma + \cos \varphi_i \cos \alpha \sin \gamma)),$$

$$(J_{x_2} + \sum_{i=1}^n m_i r^2 \cos^2 \varphi_i) \ddot{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n m_i r^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^n m_i r \sin \alpha \cos \varphi_i (s_2 \cos \gamma + r \sin \varphi_i) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^n m_i r \cos \varphi_i \sin \alpha (\ddot{y} \cos \delta - \ddot{x} \sin \delta) - 2 \sum_{i=1}^n m_i r^2 \sin \alpha \sin^2 \varphi_i \dot{\theta} \dot{\varphi}_i - [(-J_{z_2} + J_{y_2}) \cos \alpha \sin \alpha - \sum_{i=1}^n m_i (r^2 \cos^2 \varphi_i \cos \alpha \sin \alpha + rs_2 \cos \varphi_i \sin \gamma \sin \alpha)] \dot{\theta}^2 = - \sum_{i=1}^n m_i g \cos \varphi_i \cos \alpha,$$

$$m_i r^2 \ddot{\varphi}_i + c_\varphi \dot{\varphi}_i + m_i r (\cos \varphi_i (\ddot{y} \sin \delta + \ddot{x} \cos \delta) + \sin \varphi_i \cos \alpha (\ddot{y} \cos \delta - \ddot{x} \sin \delta)) - m_i r (s_2 \sin \varphi_i \cos \gamma \sin \alpha + r \sin \alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} + m_i (s_2 \cos \varphi_i \sin \gamma + \sin \varphi_i \cos \alpha \cos \gamma) \ddot{\theta} - m_i (r^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi_i \cos \varphi_i + rs_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \cos \alpha \sin \gamma)) \dot{\theta}^2 + m_i r^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \dot{\alpha}^2 + rs_2 \sin \alpha \cos \gamma \sin \varphi_i \dot{\alpha} \dot{\theta} - m_i r^2 \sin \alpha \cos 2\varphi_i \dot{\alpha} \dot{\theta} = m_i g \sin \varphi_i \sin \alpha. \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Как обычно, при исследовании роторных систем удобно пользоваться вращающейся системой координат, связанной с ротором.

Вместо переменных  $x, y, \theta$  введем новые переменные по формулам

$$z = x + iy = \zeta e^{i\theta}, \dot{x} + i\dot{y} = (\dot{\zeta} + \zeta \dot{\theta} i) e^{i\theta}, \ddot{x} + i\ddot{y} = (\ddot{\zeta} + 2\dot{\zeta} \dot{\theta} i - \zeta \dot{\theta}^2 + \zeta \ddot{\theta} i) e^{i\theta} \quad (2)$$

и будем считать, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью, равной

$$\dot{\theta}_0 = \nu = const.$$

Подставляя новые переменные в основную систему (1), получим следующую автономную систему уравнений движения относительно переменных  $\zeta, \alpha, \varphi_i$ :

$$[M_0 (\ddot{\zeta} - \zeta \dot{\theta}^2 + i(2\dot{\zeta} \dot{\theta} + \zeta \ddot{\theta})) + c(\dot{\zeta} + i\zeta \dot{\theta}) + 2i\nu \zeta + k\zeta] e^{i\theta} = - \frac{d}{dt} [(m_1 s_1 i + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 i e^{i\beta} + r i \sin \varphi_i e^{i(\gamma+\beta)} + r \cos \varphi_i \cos \alpha e^{i(\beta+\gamma)})] \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n (\cos \varphi_i e^{i(\beta+\gamma)} + i \sin \varphi_i \cos \alpha e^{i(\beta+\gamma)}) r \dot{\varphi}_i + i \sum_{i=1}^n r \sin \alpha \cos \alpha e^{i(\beta+\gamma)}] e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned}
& (J_{x_2} + \sum_{i=1}^n m_i r^2 \cos^2 \varphi_i) \ddot{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n m_i r^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^n m_i r \sin \alpha \cos \varphi_i (s_2 \cos \gamma + r \sin \varphi_i) \ddot{\theta} - \\
& - \sum_{i=1}^n m_i r \cos \varphi_i \sin \alpha (-\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta}) \sin(\beta + \gamma) + (\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \cos(\beta + \gamma) - \\
& - 2 \sum_{i=1}^n m_i r^2 \sin \alpha \sin^2 \varphi_i \dot{\theta} \dot{\varphi}_i - [(-J_{z_2} + J_{y_2}) \cos \alpha \sin \alpha - \sum_{i=1}^n m_i (r^2 \cos^2 \varphi_i \cos \alpha \sin \alpha + \\
& + r s_2 \cos \varphi_i \sin \gamma \sin \alpha)] \dot{\theta}^2 = - \sum_{i=1}^n m_i g \cos \varphi_i \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& m_i r^2 \ddot{\varphi}_i + c_\varphi \dot{\varphi}_i + m_i r (\cos \varphi_i ((\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta}) \cos(\beta + \gamma) + (\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \sin(\gamma + \beta)) + \\
& + \sin \varphi_i \cos \alpha (-\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\theta} - \xi\dot{\theta}^2 - \eta\ddot{\theta}) \sin(\beta + \gamma) + (\ddot{\eta} + 2\dot{\xi}\dot{\theta} - \eta\dot{\theta}^2 + \xi\ddot{\theta}) \cos(\beta + \gamma)) \\
& - m_i r (s_2 \sin \varphi_i \cos \gamma \sin \alpha + r \sin \alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} + m_i (s_2 \cos \varphi_i \sin \gamma + \sin \varphi_i \cos \alpha \cos \gamma) \ddot{\theta} - \\
& - m_i (r^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi_i \cos \varphi_i + r s_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \cos \alpha \sin \gamma)) \dot{\theta}^2 + m_i r^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i \dot{\alpha}^2 + \\
& + r s_2 \sin \alpha \cos \gamma \sin \varphi_i \dot{\alpha} \dot{\theta} - m_i r^2 \sin \alpha \cos 2\varphi_i \dot{\alpha} \dot{\theta} = m_i g \sin \varphi_i \sin \alpha, \quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

**Результаты и обсуждение.** Теперь рассмотрим вопрос существования стационарного движения, которое соответствует решению вида

$$\zeta = A e^{i\phi_0}, \quad \psi_i = \psi_{0i} = \text{const}, \quad A = \text{const}, \quad \phi_0 = \text{const}, \tag{4}$$

где  $A$  и  $\phi_0$  – постоянная амплитуда и фаза сдвига вращательного движения. Подставляя решение вида (4) в уравнения движения (3), получим необходимые условия существования стационарного движения в виде

$$\begin{aligned}
& (k - M_0 v^2)(\xi_0 + i\eta_0) = -(\widehat{m}_1 s_1 i + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 i e^{i\beta} + r i \sin \varphi_i e^{i(\gamma+\beta)} + r \cos \varphi_i \cos \alpha e^{i(\gamma+\beta)}) i v^2 \\
& m_i r (\cos \varphi_i (-\xi_0 v^2 \cos(\beta + \gamma) - \eta_0 v^2 \sin(\beta + \gamma) + \sin \varphi_i \cos \alpha (\xi_0 v^2 \sin(\beta + \gamma) - \\
& - \eta_0 v^2 \cos(\beta + \gamma))) - m_i (r^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi_i \cos \varphi_i + r s_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \cos \alpha \sin \gamma)) v^2 = \\
& = m_i g \sin \varphi_i \sin \alpha. \quad (i = 1, 2, \dots, n),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n m_i r \cos \varphi_i \sin \alpha (\xi_0 v^2 \sin(\beta + \gamma) - \eta_0 v^2 \cos(\beta + \gamma)) + \sum_{i=1}^n m_i (r^2 \cos^2 \varphi_i \cos \alpha \sin \alpha + \\
& + r s_2 \cos \varphi_i \sin \gamma \sin \alpha) v^2 = \sum_{i=1}^n m_i g \cos \varphi_i \cos \alpha,
\end{aligned}$$

#### Частные случаи:

**Система АБУ установлена под малым углом  $\alpha$ ,** закреплена и не сбалансирована (т.е.  $A \neq 0$ ). В этом случае последнее уравнение (5) по отношению к  $\alpha$  отпадает. Если имеют место два балансировочных шарика и при этом сделать замену  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , то получим следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{k}{v^2} - M_0\right) \zeta = \widehat{m}_1 s_1 + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 e^{i\beta} + r (\sin \varphi_i + i \cos \varphi_i) e^{i(\beta+\gamma)}), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& (\sin \varphi_i \sin(\gamma + \beta) - \cos \varphi_i \cos(\gamma + \beta)) \xi_0 - (\cos \varphi_i \sin(\gamma + \beta) - \\
& - \sin \varphi_i \cos(\gamma + \beta)) \eta_0 = \widehat{g} \sin \varphi_i \alpha + s_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \sin \gamma), \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

ИЛИ



$$\Omega^2 \xi_0 = \widehat{m}_1 s_1 + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \cos \beta + r(\sin \varphi_i \cos(\beta + \gamma) - \cos \varphi_i \sin(\beta + \gamma))), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 \eta_0 &= \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \sin \beta + r(\sin \varphi_i \sin(\beta + \gamma) - \cos \varphi_i \cos(\beta + \gamma))), \\ (\sin \varphi_i \sin(\gamma + \beta) - \cos \varphi_i \cos(\gamma + \beta)) \xi_0 - (\cos \varphi_i \sin(\gamma + \beta) - \\ \sin \varphi_i \cos(\gamma + \beta)) \eta_0 &= \widehat{g} \sin \varphi_i \alpha + s_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \sin \gamma), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

Если имеют место два балансировочных шарика, то уравнения для определения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  примут вид:

$$\cos(\varphi_1 + \Delta) \xi_0 + \sin(\varphi_1 + \Delta) \eta_0 = -(\widehat{g} \sin \varphi_1 + s \cos(\gamma + \varphi_1)), \quad (9)$$

$$\cos(\varphi_2 + \Delta) \xi_0 + \sin(\varphi_2 + \Delta) \eta_0 = -(\widehat{g} \sin \varphi_2 + s \cos(\gamma + \varphi_2)), \quad (10)$$

где  $\Delta = \beta + \gamma$ ,  $\widehat{g} = g \alpha v^{-2}$ .

Отсюда для определения  $\xi_0$  и  $\eta_0$  умножим первое уравнение (9) на  $\sin(\varphi_2 + \Delta)$ , а второе уравнение (10) на  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$  и вычитаем из уравнения (9) уравнение (10) и в итоге получим:

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \xi_0 = -\widehat{g} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \Delta + s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\cos \Delta - \gamma).$$

Аналогичным образом уравнение (9) умножим на  $\cos(\varphi_1 + \Delta)$ , а второе уравнение (10) на  $\cos(\varphi_2 + \Delta)$  и, вычитая из уравнения (9) уравнение (10), получим:

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \eta_0 = -\widehat{g} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \Delta - s_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\Delta - \gamma).$$

Отсюда имеем  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  или  $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi k$  и  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \neq 0$ ,

$$\xi_0 = \widehat{g} \sin \Delta - s_2 \cos \beta, \quad \eta_0 = -\widehat{g} \cos \Delta - s_2 \sin \beta. \quad (11)$$

Подставляя найденные значения  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  в уравнение (7), получим:

$$\Omega^2 (\widehat{g} \sin \Delta - s_2 \cos \beta) = \widehat{m}_1 s_1 + 2m s_2 \cos \beta + m r (\cos \Delta \sin \varphi_1 \sin \Delta \cos \varphi_2 + \cos \Delta \sin \varphi_2 + \sin \Delta \cos \varphi_2), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\Omega^2 (\widehat{g} \cos \Delta - s_2 \sin \beta) &= 2m s_2 \sin \beta \cos \Delta + \\ + m r (\sin \Delta \sin \varphi_1 + \cos \Delta \cos \varphi_1 + \sin \Delta \sin \varphi_2 + \cos \Delta \cos \varphi_2) \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения углов расположения шариков  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  первое уравнение (12) умножим на  $\cos \Delta$ , а второе уравнение (13) на  $\sin \Delta$  и вычтем из уравнения (12) уравнение (13). В результате имеем

$$\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = \frac{-\Omega^2 (\widehat{g} - s_2 \sin(\Delta + \beta)) + \widehat{m}_1 s_1 \sin \Delta + 2m s_2 \sin \gamma}{m r \cos 2\Delta}.$$

Далее первое уравнение (12) умножим на  $\sin \Delta$ , а второе уравнение (13) на  $\cos \Delta$  и вычтем из уравнения (12) уравнение (13) и получим

$$\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = \frac{\Omega^2 (\widehat{g} \sin 2\Delta - s_2 \cos \gamma) - \widehat{m}_1 s_1 \cos \Delta - 2m s_2 \cos(\Delta + \beta)}{m r \cos 2\Delta}.$$

Из полученных соотношений видно, что положение шаров зависит от параметров АБУ и погрешности установки.

**Проверим возможность сбалансированного стационарного движения**, которое соответствует значению амплитуды, равной нулю (т.е.  $A=0$ ):

$$0 = \widehat{m}_1 s_1 + \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \cos \beta + r(\sin \varphi_i \cos(\beta + \gamma) - \cos \varphi_i \sin(\beta + \gamma))),$$

$$0 = \sum_{i=1}^n m_i (s_2 \sin \beta + r(\sin \varphi_i \sin(\beta + \gamma) - \cos \varphi_i \cos(\beta + \gamma))),$$

$$0 = \widehat{g} \sin \varphi_i \alpha + s_2 (\cos \varphi_i \cos \gamma - \sin \varphi_i \sin \gamma), \quad i = 1, \dots, n.$$

Нетрудно убедиться, что необходимые условия стационарности в этом случае совпадают с условиями, полученными в работе [1].

В общем случае нахождение аналитического решения системы уравнений (5) представляет собой достаточно трудную задачу. Поэтому далее будем решать уравнение (5) численно при конкретных значениях параметров системы.

На рис. 2 – 4 показаны полученные численные значения для случая, когда

$$m_1 = 1.5, m_2 = 0.7, m = 0.05, s_1 = 0.004, s_2 = 0.006, \beta = \frac{\pi}{40}, \gamma = \frac{\pi}{36}.$$

Из результатов (см. рис. 2) видно, что ротор за критической скоростью вращения совершает прецессионное движение в окрестности значения амплитуды, равной  $A=0.255 \cdot 10^{-4}$ , при этом он полусбалансирован.

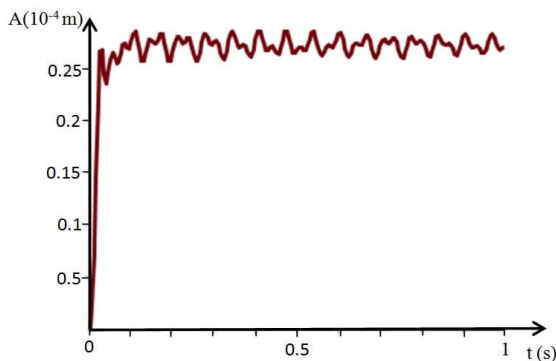


Рис.2. Колебания центра масс ( $G$ ) по времени

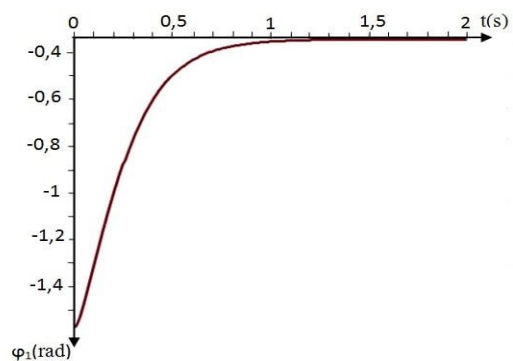


Рис. 3. Положение первого шарика ( $\varphi_1$ ) по времени

Из результатов (см. рис. 3 и 4) можно увидеть, что шарики с течением времени занимают определенное положение в трубке АБУ, т.е. один из шариков стремится к положению  $\varphi_1=0$ , а второй шарик занимает положение  $\varphi_2=-0.236$  рад.

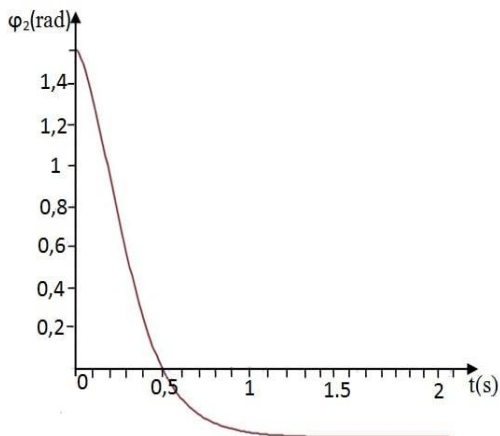


Рис.4. Положение второго шарика ( $\varphi_2$ ) по времени

### Заключение.

1. Разработана математическая модель движения АБУ с учетом эксцентricности центра АБУ, когда трубка с балансировочными шариками обладает осью вращения, расположенной на поперечной плоскости.

2. Получены необходимые условия стационарных режимов движения АБУ. В частных случаях (когда имеют место два балансировочных шарика) подробно проанализирована реализуемость полубалансировочного режима.

3. Установлено, что полученные уравнения позволяют учитывать и угловую погрешность АБУ. При этом, в малых углах угловой погрешности АБУ получены в явном виде значения амплитуды колебаний и углы расположения шаров.

4. При конкретных значениях параметров системы получены численные значения амплитуды колебаний и изменения углов расположения шариков.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быков В.Г., Ковачев А.С. Динамика ротора с эксцентricским шаровым автобалансировочным устройством // Вестник Санкт-Петербургского университета. Вып. 4. Сер. 1. 2014. Т. 1. С. 579–588.
- [2] Быков В.Г. Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансировочным механизмом. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Вып. 4. Сер. 1. 2006. №2. С. 90–101.
- [3] Genta G. Dynamics of Rotating Systems // Springer. 2005. – 658 p.

- [4] Быков В.Г., Ковачев А.С. Динамика статически неуравновешенного ротора с эллиптическим шаровым автобалансирующим устройством // Вестник Санкт-Петербургского университета. Вып. 3. Сер. 1. 2019. Т. 6. С. 452–461.
- [5] Быков В.Г. Нестационарные режимы движения статически неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Вып.3. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2010. С. 89–96.
- [6] Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М.: Изд. «Машиностроение», 1964. –368 с.
- [7] Jeffcott H.H. The Lateral Vibration of the Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed // Phil. Mag. Vol.6. 1919 no. 37. P. 303–314.
- [8] Зайцев Н.Н., Зайцев Д.Н., Макаров А.А. Инженерный анализ установившихся режимов однодискового ротора с многорядным шаровым автобалансирующим устройством // Вестник (Пермь) ПНИГПУ. Аэрокосмическая техника 2017. № 48. С. 43–59.
- [9] Кельзон А.С., Малинин Л.М. Управление колебаниями роторов. Спб.: Политехника, 1992. – 118 с.
- [10] Магнус. Гироскопы. Теория и применение. М.: Мир 1974.
- [11] Нестеренко В.П., Соколов А.П. Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. Иркутск: ИЛИ, 1983. С. 46–50.
- [12] Olsson K.O. Limits for the use of auto-balancing // International Journal of Rotating Machinery. Vol.10. 2004. N 3. P. 221–226.
- [13] Ковачев А.С. Балансировка динамически неуравновешенного ротора с учетом неидеальности автобалансирующих устройств // Вестник СПбГУ. Вып. 4. Сер. 1. 2015 Т. 2 (60). С. 606–616.
- [14] Пасынкова И.А. Совместные нелинейные колебания неуравновешенного ротора и корпуса // Вестник СПбГУ. Вып. 1. Сер.1. 2014. Т. 1 (59). С.152–161.
- [15] Sung C.K., Chan T.C., Chao C.P., Lu C.H. Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer. Mechanism and Machine Theory. 2013.69. P.115–126.
- [16] Горбенко А.Н. Общая структура уравнений движения роторных машин с автобалансиром пассивного типа // Авиационно-космическая техника и технология. 2011. № 8. С. 71–76. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit\\_2011\\_8\\_16](http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2011_8_16).
- [17] Подольский М.Е., Черенкова С.В. Физическая природа и условия возбуждения прямой и обратной прецессии ротора // Теория механизмов и машин. 2014. Т. 12. № 1. С. 27–40.
- [18] Гончаров В.В., Филimoniхин Г.Б. Вид и структура дифференциальных уравнений движения и процесса уравновешивания роторной машины с автобалансирами // Известия Томск. политехн. ун-та. 2015. Т. 326. № 12. С. 20–30.
- [19] Ehyaei J., Moghaddam M.M. Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers // Journal of Sound and Vibration. Vol.321. 2009. P. 554–571.
- [20] Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors // International Journal of Non-Linear Mechanics: Vol.43. 2008. P. 527–541.

Дата поступления  
11.05.2022

**Мирсаидов М.М., Сидиков М.Х., Туражонов К.М. Роторларни эксцентриситетли айлана бўйлаб ҳаракатланадиган шарчалар ёрдамида балансирлаш динамикасини баҳолаш**

**Аннотация:** Ушбу иш автобалансирувчи қурилмада (АБҚ) катта тезликларда ҳаракатланувчи ротор динамикасини тадқиқ этишига бағишланган бўлиб, бу масала механиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Мақолада механик модел сифатида Джеффкотт модели қабул қилинган бўлиб, олинган ҳаракат дифференциал тенгламалари шарли автобалансири роторнинг ҳаракатини ифодалайди. Олинган тенгламалар Лагранж тенгламалари асосида тузилган бўлиб, бу тенгламалар роторнинг симметрия ўқидан оғишини ва горизонтал айланиш ўқига эга бўлишини ҳам ифодалайди. Ҳаракат тенгламаларини ечишда стационар ҳаракат шартини қабул қилинган. Қўйилган масала аналитик ва сонли таҳлил қилиниб, стационар ҳаракат шартини бажарилиши текширилган. Бунда АБҚ нафақат эксцентрик марказига ва маълум бурчак хатолигига эга бўлиши ҳам кўрсатилган. Ушбу ишда АБҚ нинг икки ва ундан ортиқ балансирловчи шарчаларга эга бўлган ҳолдаги ҳаракати ҳам текширилган. Хусусий ҳолда эса роторнинг ўзгармас айланиш бурчакли ҳолати учун олинган натижалар, адабиётлардаги мавжуд маълум натижалар билан солиштирилган.

**Калит сўзлар:** автобалансирувчи қурилма; шар; бурчак хатолиги; стационар ҳаракат; эксцентрик; дисбаланс; инерция кучи.

**Mirsaidov M.M., Sidikov M.H., Turajonov K.M. Rotor dynamics considering the eccentricity and angular error of the ball auto-balancing device**

**Abstract:** The study is devoted to the dynamics of rotors taking into account the auto-balancing device (ABD). At present, the solution to the problem of dynamic balancing of an unbalanced rotor using a ball auto-balancing device is relevant. A model is proposed in this article and the equations of motion of a rotor with a ball auto-balancing device are derived; the device has not only eccentricity relative to the axis of symmetry of the rotor but also has a horizontal axis of rotation. The mechanical model is based on the classic Jeffcott model. Equations of motion of the system are obtained in the form of the Lagrange equations, and conditions for the existence of stationary motion are determined. Analytical and numerical analysis of the conditions for the existence of stationary motion is performed for the case when the ABD has the eccentricity of the center and the angular error. Various possible cases of unbalanced modes are considered (when the ABD has two or more balancing balls). In a specific case, in the absence of angular rotation, the results obtained coincide with the known results.

**Keywords:** ball auto-balancing device; stationary motion; eccentricity; imbalance; inertial force.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ГРУНТАХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С ГРУНТОМ

Султанов К.С., Хусанов Б.Э., Рихсиева Б.Б.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: khusanov@mail.ru

**Аннотация:** Численно решена двумерная осесимметричная задача о распространении сдвиговых волн вокруг подземного трубопровода при осесимметричном движении трубопровода. Из-за существенной разницы жесткости трубопровода и грунта подземный трубопровод считается твердым недеформированным телом, а грунтовая среда вокруг трубопровода моделируется вязкоупругим законом в виде стандартно-линейного тела. Для решения задачи использован метод конечных разностей, модифицированный разностной схемой Уилкинса. На поверхности контакта подземного трубопровода с грунтом выполняется условие полного прилипания. Получены изменения по времени касательного напряжения, скорости и перемещения частиц грунта по направлению оси трубопровода в фиксированных сечениях грунта. Показан процесс смещения грунта вокруг трубопровода в виде графика при фиксированном моменте времени. Обнаружено уменьшение параметров волны в грунте с расстоянием в поперечном направлении от подземного трубопровода: снижения касательного напряжения на расстоянии 50 см и более от трубопровода в 3 раза по сравнению со значением касательного напряжения на приконтактных слоях грунта. Установлено также влияние времени действия нагрузки и волн разгрузки на параметры волны грунта вокруг подземного трубопровода. По результатам решения задачи также получена вязкоупругая диаграмма «касательное напряжение – деформация сдвига». При учете разгрузки эти диаграммы описывают начальную стадию гистерезиса. Полученные результаты позволяют определить механизм формирования напряженного состояния и реакции грунта на подземный трубопровод, которые могут быть использованы при расчетах на прочность подземных трубопроводов.

**Ключевые слова:** грунты; подземный трубопровод; сдвиговое взаимодействие; распространение волн; численный метод.

**Введение.** Строительство магистральных подземных трубопроводов в мире все больше увеличивается. Магистральные трубопроводы являются важнейшими энергетическими и строительными объектами [1]. Обеспечение их надежной и безаварийной работы, особенно при сейсмических воздействиях, первостепенная актуальная проблемой. Как отмечается в [1], даже незначительные сейсмические силы ускоряют отказы на участках и приводят к самым серьезным повреждениям, особенно когда маршрут подземного трубопровода совпадает с направлением вектора сейсмической нагрузки. Транспортировка по магистральным трубопроводам опасных веществ (природного газа, нефти и нефтепродуктов) также является очень серьезной проблемой, предъявляемой к надежности и устойчивости подземных трубопроводов [2]. Надежность и прочность системы подземных магистральных трубопроводов, как отмечается в [3, 4], прежде всего, зависят от сил взаимодействия, возникающей при относительных движениях трубопровода и окружающего его грунта. При этом одним из важных моментов является напряженное состояние грунта вокруг подземного трубопровода.

При решении задач сейсмостойкости подземных сооружений [1–4] основное внимание уделяется движениям и колебаниям самого подземного трубопровода. Однако напряженно-деформированное состояние грунта вокруг трубопровода также играет решающую роль при формировании напряженного состояния трубопровода [5]. При этом важнейшими факторами, влияющими на напряжения и деформации трубопровода, являются степень увлажненности грунта вокруг трубопровода [6], структурное разрушение грунта при его взаимодействии с трубопроводом [5, 7–10].

В [6] рассмотрены влияние и учет степени увлажненности грунтовой среды на его механические свойства. Изменение механических характеристик грунта при его деформировании изучено на основе экспериментов в [9]. Методы определения механических характеристик грунтов при динамических (сейсмических) нагрузках рассмотрены в [8, 11], а изменение деформационных характеристик контактного слоя грунта при взаимодействии с трубопроводом – в [7, 10].

В работах [11–22] проведены теоретические и экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния грунтовой среды с учетом ее реологических свойств [13], трехмерный конечно-элементный анализ взаимодействия трубопровода с

грунтом [14], затухания волн в грунте вокруг трубопровода [15], взаимодействия трубопроводов, лежащих на морском дне с морской глиной [16], последствий землетрясений оползней и цунами на подземных трубопроводах [17–20] и особенностей работы подводных трубопроводов [21, 22].

Результаты исследований [5, 7] показывают, что в процессе взаимодействия подземного трубопровода с грунтом при динамических (сейсмических) нагрузках существенную роль играют касательные напряжения в грунте.

Целью настоящей статьи является определение касательных (сдвиговых) напряжений в грунте вокруг подземного трубопровода при его динамическом взаимодействии с грунтовой средой.

**Постановка задачи и метод ее решения.** С развитием работы [6], где рассмотрен процесс разрушения грунта вокруг подземного трубопровода в зависимости от механических свойств и характеристик грунта, в данной статье исследуется напряженно-деформированное состояние грунта вокруг подземного трубопровода.

Из-за существенной разницы жесткости стального трубопровода и грунта подземный трубопровод считается абсолютно твердым недеформированным телом. В этом случае считается, что деформация самого трубопровода не влияет на напряженное состояние грунта вокруг трубопровода. Это допущение позволяет упростить постановку задачи.

Рассматривается двумерная осесимметричная задача о движении подземного трубопровода в грунтовой среде как жесткое цилиндрическое тело. Продольное движение подземного трубопровода по оси, совпадающей с осью трубы, задается в виде скорости

$$v_z = v_z(t), \quad v_r = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \quad (1)$$

Подземный трубопровод принят достаточно длинным, а грунтовая среда неограниченной. Тогда уравнения движения грунта имеют вид

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r}, \quad (2)$$

где  $r$  – радиальная координата;  $z$  – координата по оси трубопровода;  $\sigma_{rr}$  – компоненты напряжения;  $v_r$  – скорость в радиальном направлении относительно трубопровода;  $\tau_{rz}$  – касательное напряжение;  $\sigma_{zz}$  – напряжение в направлении оси;  $\sigma_{\theta\theta}$  – компонента напряжения по угловой координате.

Объемное деформирование грунта, т.е. изменение шаровой части тензора напряжения для грунтовой среды, описывается вязкоупругими уравнениями:

когда грунт считается вязкоупругопластическим телом

$$\frac{1}{K_D} \frac{dP}{dt} + \mu \frac{P}{K_S} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \mu \ln V, \quad (3)$$

где  $P$  – давление;  $V = \rho_0/\rho$  – относительный объем;  $K$  – модуль объемного сжатия грунта;  $K_D$  при  $dV/dt \rightarrow \infty$ ,  $K_S$  при  $dV/dt \rightarrow 0$ ;  $\mu$  – параметр объемной вязкости. Девиатор тензора напряжений (сдвиговые напряжения) связан с компонентами сдвиговых деформаций соотношением для вязкоупругого деформирования грунта

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_D} \frac{dS_{rr}}{dt} + \mu_1 \frac{S_{rr}}{G_S} &= \frac{de_{rr}}{dt} + \mu_1 e_{rr}, & \frac{1}{G_D} \frac{dS_{zz}}{dt} + \mu_1 \frac{S_{zz}}{G_S} &= \frac{de_{zz}}{dt} + \mu_1 e_{zz}, \\ \frac{1}{G_D} \frac{dS_{\theta\theta}}{dt} + \mu_1 \frac{S_{\theta\theta}}{G_S} &= \frac{de_{\theta\theta}}{dt} + \mu_1 e_{\theta\theta}, & \frac{1}{G_D} \frac{d\tau_{rz}}{dt} + \mu_1 \frac{\tau_{rz}}{G_S} &= \frac{de_{rz}}{dt} + \mu_1 e_{rz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где связь сдвиговых деформаций через скорости частиц определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{de_{rr}}{dt} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}, & \frac{de_{zz}}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}, \\ \frac{de_{\theta\theta}}{dt} &= \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3V} \frac{dV}{dt}, & \frac{de_{rz}}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В соотношении (4)  $G_D$  – динамический и  $G_S$  – статический модули сдвига;  $\mu_1$  – параметр сдвиговой вязкости. Из соотношений (5) получаем уравнения неразрывности для определения относительного объема:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}. \quad (6)$$

Система уравнений (2) – (6) с граничными условиями (1) и нулевыми начальными условиями решается численно методом конечных разностей по схеме Уилкинса [23].

**Результаты расчетов и их анализ.** В данном разделе представляются основные материалы исследований, доказательства теорем, лемм и результаты экспериментов, численных расчётов, теоретических выкладок.

Результаты численных расчетов представим в виде графиков для следующих исходных данных: внешний радиус трубопровода  $R_{ext}=0.2$  м, начальная плотность грунта  $\rho_0=2000$  кг/м<sup>3</sup>, динамический модуль упругости  $E_D=200$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ , Отношение динамических и статических модулей  $\gamma=E_D/E_S=2$ , величина динамической вязкости грунта  $\eta=10^6$  Па·с, где параметры объемной и сдвиговой вязкости вычисляются с помощью формул

$$\mu = \frac{K_D K_S}{(K_D - K_S) \eta}, \quad \mu_1 = \frac{G_D G_S}{(G_D - G_S) \eta} = \frac{G_D}{(\gamma - 1) \eta},$$

движение подземного трубопровода (1)  $v_z=v_{max}t/t^*$  при  $t \leq t^*$ ,  $v_z=v_{max}$  при  $t > t^*$ ,  $v_{max}=0.5$  м/с.  $t^*=2$  мс.

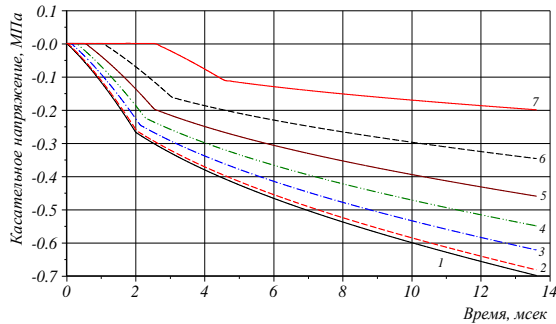


Рис.1. Изменение касательных напряжений по времени:  
1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см;  
5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

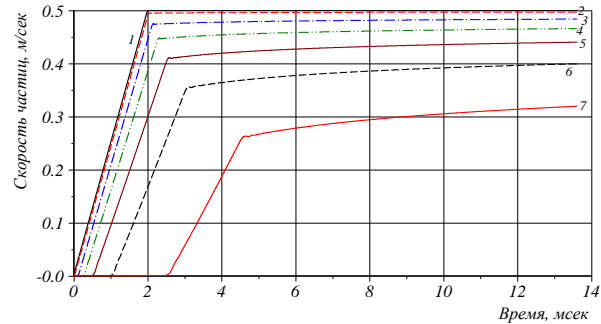


Рис.2. Изменение скоростей частиц по времени:  
1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см;  
5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

На рис. 1–3 приведены изменения касательных напряжений, скоростей частиц и перемещения грунта по времени в фиксированных сечениях  $r=20, 20.5, 22.5, 25.5, 30.5, 40.5$  и  $70$  см, соответственно кривые 1–7. Касательные напряжения в грунте возникают с приходом поперечных волн от движения подземного трубопровода. В момент линейного нарастания скорости трубопровода касательные напряжения также возрастают линейным образом. Далее, когда скорость движения трубопровода постоянная, наблюдается уменьшение интенсивности нарастания касательного напряжения. С расстоянием от трубопровода максимальные напряжения также уменьшаются, например, касательные напряжения на расстоянии  $50$  см от трубопровода (кривая 7) в  $3.5$  раза меньше, чем касательные напряжения, возникающие непосредственно на контактной поверхности (кривая 1) и на расстоянии  $0.5$  см (кривая 2). Для скоростей частиц грунта в направлении оси трубопровода ( $Oz$ ) также наблюдается затухание волны с расстоянием от подземного трубопровода. Кривая 1 на

рис. 2 соответствует заданной скорости движения трубопровода. Движения частиц грунта начинаются с приходом поперечных волн, за фронтом волны вблизи трубопровода скорость грунта остается практически постоянной, а смещения частиц линейным образом увеличиваются (кривые 2–4 на рис. 2 и 3). Вдали от подземного трубопровода наблюдаются незначительные увеличения скорости частиц грунта по инерции и за счет вязкостных свойств грунта. Отметим, что увеличение времени расчета не приводит к существенным изменениям поведения напряженно-деформированного состояния грунта. максимальное касательное напряжение на контактной поверхности и вблизи ( $r=20$  и  $20.5$  см) не превышает 1 МПа, а уменьшение напряжения на расстоянии 50 см и более составит не выше 3 раз по сравнению с напряжением на контактной поверхности.

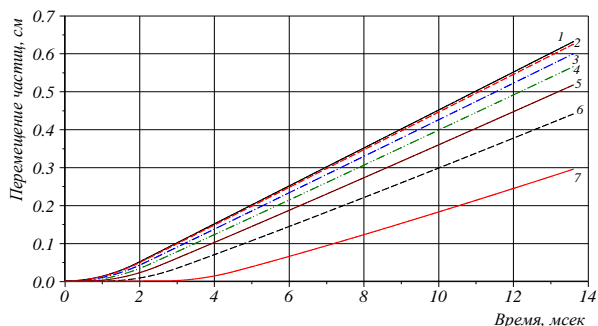


Рис.3. Изменение перемещения частиц грунта по времени: 1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см; 5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

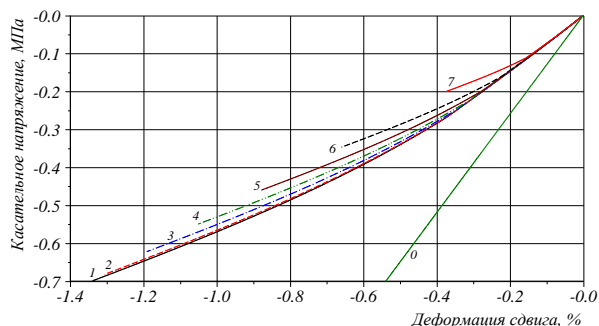


Рис.4. Зависимость касательного напряжения от деформации сдвига: 1-  $r=20$ см; 2-  $r=20.5$ см; 3-  $r=22.5$  см; 4-  $r=25.5$  см; 5-  $r=30.5$  см; 6-  $r=40.5$  см; 7-  $r=70$  см

На рис. 4 приведена диаграмма касательного напряжения от деформации сдвига, полученная при решении задач в тех же фиксированных точках грунта, что и на рис. 1–3. Здесь кривая 0 соответствует упругому случаю деформирования грунта. Как видно из рис. 4, диаграмма «касательное напряжение – деформация сдвига» в данном случае описывает нелинейное деформирование грунта вокруг подземного трубопровода.

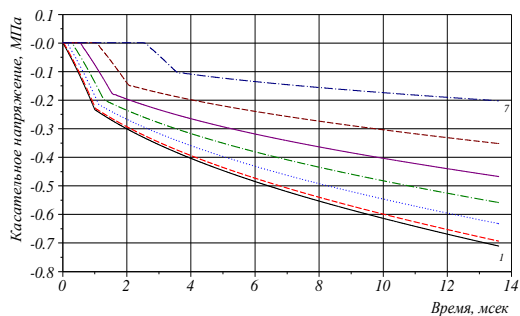


Рис.5. Изменение касательных напряжений по времени: 1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см; 5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

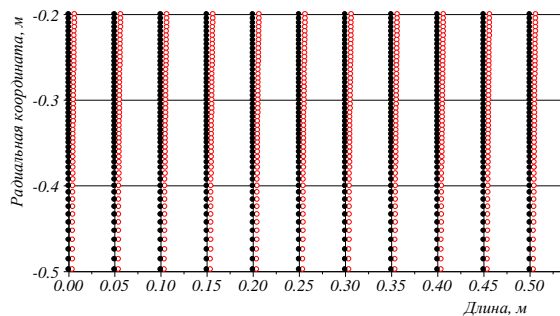


Рис.6. Перемещения частиц грунта относительно подземного трубопровода

На рис. 5 приведено изменение касательного напряжения по времени в тех же рассматриваемых фиксированных точках грунта при уменьшении времени нарастания максимальной скорости подземного трубопровода на два раза ( $t^*=1$  мс). Изменения времени достижения максимальной скорости трубопровода на конечные достигаемые значения максимальных касательных напряжений практически не влияют, а влияние наблюдается в момент линейного изменения скорости, при уменьшении  $t^*$  увеличивается, а при увеличении  $t^*$ , наоборот, снижается интенсивность увеличения касательного напряжения. Смещения частиц грунта относительно подземного трубопровода для рассматриваемого конечного момента времени показаны на рис. 6. Отсюда видно, что смещения грунта относительно подземного трубопровода происходят, в основном, вблизи трубопровода грунта толщиной 20 см, т.е. при контактном слое грунта.



Определенный интерес вызывает поведение грунта вокруг подземного трубопровода с учетом обратного движения, т.е. с учетом волн разгрузки. Пусть скорость движения подземного трубопровода имеет вид, показанный на рис. 7 кривой 1, т.е. движение подземного трубопровода имеет вид  $v_z = v_{max}t/t^*$  при  $t \leq t^*$ ,  $v_z = v_{max}$  при  $t^* < t < t^{**}$ ,  $v_z = v_{max} + v_{max}(t^{**} - t)/t^*$  при  $t^{**} \leq t \leq t^{**} + t^*$ ,  $v_z = 0$  при  $t > t^{**} + t^*$ ,  $v_{max} = 0.5$  м/с,  $t^* = 1$  мс,  $t^{**} = 3$  мс. Для этого случая на рис. 7–8 приведены изменения скоростей частиц и касательного напряжения по времени в фиксированных сечениях грунта по радиальному направлению  $r = 20, 20.5, 22.5, 25.5, 30.5, 40.5$  и  $70$  см, что соответствует кривым 1–7. Как видно, с приходом волн интенсивно увеличиваются значения скоростей и касательного напряжения. Далее при постоянном изменении скорости трубопровода по времени увеличиваются также значения скорости частиц и касательного напряжения, но с меньшей интенсивностью. Здесь также наблюдается уменьшение максимальных значений параметров волны с расстоянием. При уменьшении скорости движения трубопровода начинает распространяться сдвиговая волна разгрузки, что свидетельствует об интенсивном уменьшении как скорости частиц грунта, так и значения касательного напряжения, до нулевого.

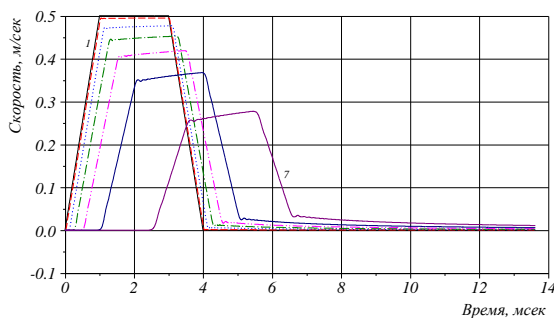


Рис. 7. Изменение скоростей частиц по времени

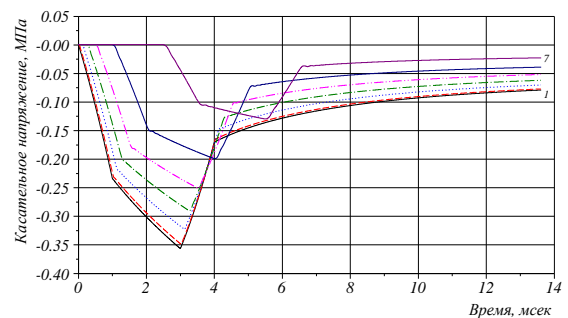


Рис. 8. Изменение касательных напряжений по времени

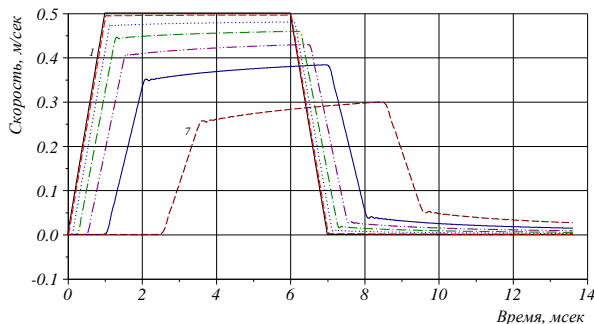


Рис. 9. Изменение скоростей частиц по времени:  
1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см;  
5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

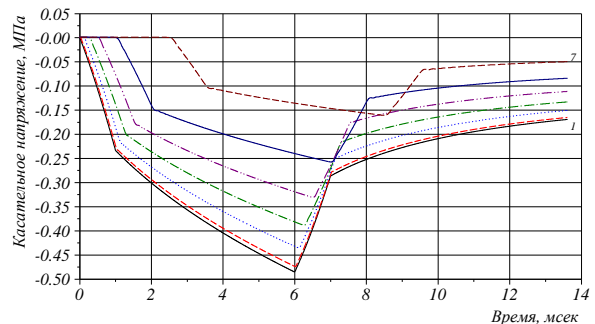


Рис. 10. Изменение касательных напряжений по времени:  
1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см;  
5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

Далее рассмотрен случай с увеличением времени движения подземного трубопровода с постоянной скоростью, т.е. пусть  $t^{**} = 6$  м/с. На рис. 9–11 приведены изменения скоростей, касательного напряжения и перемещения частиц грунта на том же сечении, что и представленный на рис. 7, 8. Как и следовало ожидать, с увеличением времени действия постоянной скорости движения подземного трубопровода увеличиваются максимальные значения касательного напряжения вблизи трубопровода до 30%, с удалением от трубопровода эти увеличения достигают 10%. При этом максимальные значения скорости частиц грунта остались практически неизменными по сравнению с предыдущим случаем (см. рис. 7 и 9). Из рис. 11 видно, что после остановки движения трубопровода перемещения частиц не меняются по времени, приобретенное смещение грунта можно считать остаточным. Зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации для рассматриваемого случая показана на рис. 12 на тех же фиксированных сечениях грунта. Эти зависимости получены по результатам решения задачи и показывают начальную стадию петли гистерезиса вязкоупругого деформирования грунта (4).



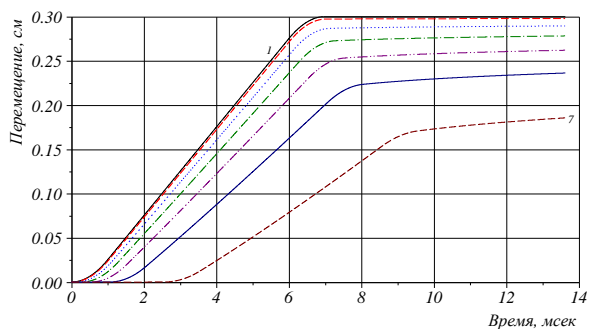


Рис.11. Изменение перемещения частиц грунта по времени: 1–  $r=20$  см; 2–  $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4–  $r=25.5$  см; 5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

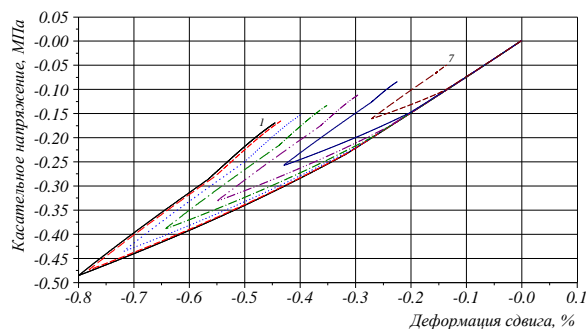


Рис.12. Зависимость касательного напряжения от деформации сдвига: 1– $r=20$  см; 2– $r=20.5$  см; 3–  $r=22.5$  см; 4– $r=25.5$  см; 5–  $r=30.5$  см; 6–  $r=40.5$  см; 7–  $r=70$  см

Таким образом, при движении подземного трубопровода в осевом направлении вокруг его грунта распространяются поперечные волны: возникают касательные напряжения, деформации сдвига и т.д.

**Заключение.** Приведена двумерная осесимметричная нестационарная задача о поведении грунта вокруг подземного трубопровода в случае движения трубопровода в осевом направлении. Разработаны алгоритм и программа численного решения поставленной задачи с использованием метода конечных разностей по схеме Уилкинса. Полученные численные решения приведены в виде графиков. Определены изменения касательного напряжения, скорости и перемещения частиц грунта вокруг подземного трубопровода. Обнаружено затухание параметров волны с расстоянием от подземного трубопровода: наибольшие касательные напряжения и смещения частиц грунта возникают в приконтактном слое грунта до 20 см от поверхности трубопровода, далее их максимальные значения уменьшаются, на расстоянии 50 см и более максимальные значения касательного напряжения уменьшаются в 3 раза и более.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Muravyeva L., Vatin N. Risk Assessment for a Main Pipeline under Severe Soil Conditions on Exposure to Seismic Forces // Applied Mechanics and Materials. Vol.635-637. 2014. P.468–471.
- [2] Lalin V.V., Kushova D.A. New Results in Dynamics Stability Problems of Elastic Rods // Applied Mechanics and Materials. Vol.617. 2014. P. 181–186.
- [3] Jung J.K., O'Rourke T.D., Argyrou C. Multi-directional force–displacement response of underground pipe in sand Canadian Geotechnical Journal. Vol.53. 2016. P. 1763–1781.
- [4] Gao F.P., Wang N., Li J., Han X.T. Pipe–soil interaction model for current-induced pipeline instability on a sloping sandy seabed // Canadian Geotechnical Journal. Vol.53. 2016. P. 1822–1830.
- [5] Wijewickreme D., Monroy M., Honegger D.G., Nyman D.J. Soil restraints on buried pipelines subjected to reverse-fault displacement // Canadian Geotechnical Journal. Vol.54. 2017. P. 1472–1481.
- [6] Khusanov B., Rikhsieva B. Thickness dimensions of the contact layer of soil-rigid body interaction // E3S Web of Conferences. Vol.97. 2019. P. 04040.
- [7] Султанов К.С., Хусанов Б.Э. Определение просадки нелинейно-деформируемого грунтового массива при увлажнении // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2002. № 3. С.2–4.
- [8] Bakhodirov A.A., Ismailova S.I., Sultanov K.S. Dynamic deformation of the contact layer when there is shear interaction between a body and the soil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Vol.79. 2015. No 6. P. 587–595.
- [9] Sultanov K.S., Loginov P.V., Ismoilova S.I., Salikhova Z.R. Wave processes in determining mechanical characteristics of soils // E3S Web of Conferences. Vol.97. 2019. P. 04009.
- [10] Sultanov K.S., Loginov P.V., Ismoilova S.I., Salikhova Z.R. Variable moduli of soil strain // E3S Web of Conferences. Vol.97. 2019. P.04013.
- [11] Султанов К.С., Хусанов Б.Э. Уравнения состояния просадочных грунтов с учетом увлажненности // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2001. № 3. С.7–11.
- [12] Sultanov K.S., Loginov P.V., Ismoilova S.I., Salikhova Z.R. Quasistaticity of the process of dynamic strain of soils Magazine of Civil Engineering. Vol.85. 2019. No 1. P.71–91.
- [13] Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures // Soil Mechanics and Foundation Engineering. Vol.49. 2013. No.6. P. 250–256.
- [14] Liyanage K., Dhar A.S. Stresses in cast iron water mains subjected to non-uniform bedding and localised concentrated forces // International Journal of Geotechnical Engineering. Vol.12. 2018. No 4. P. 368–376.

- [15] Smith A., Dixon N., Fowmes G. Monitoring buried pipe deformation using acoustic emission: quantification of attenuation // International Journal of Geotechnical Engineering. Vol.11. 2017. No 4. P. 418–430.
- [16] Meyer V., Langford T., White D.J. Physical modelling of pipe embedment and equalisation in clay // Géotechnique. 2016. No 66. No 7. P. 602–609.
- [17] Feng W., Huang R., Liu J., Xu X., Luo M. Large-scale field trial to explore landslide and pipeline interaction // Soils and Foundations. Vol.55. 2015. No 6. P.1466–1473.
- [18] Matsushashi M., Tsushima I., Fukatani W., Yokota T. Damage to sewage systems caused by the Great East Japan Earthquake, and governmental policy // Soils and Foundations. Vol.54. 2014. No 4. P.902–909.
- [19] Lam S.Y., Haigh S.K., Bolton M.D. Understanding ground deformation mechanisms for multi-propped excavation in soft clay // Soils and Foundations. Vol.54. 2014. No 3. P.296–312.
- [20] Zhang Z., Zhang M. Mechanical effects of tunneling on adjacent pipelines based on Galerkin solution and layered transfer matrix solution // Soils and Foundations. Vol.53. 2013. No 4. P.557–568.
- [21] Williams E.S., Byrne B.W., Blakeborough A. Pipe uplift in saturated sand: rate and density effects // Géotechnique. Vol.63. 2013. No 11. P.946–956.
- [22] Chatterjee S., Randolph M.F., White D.J. The effects of penetration rate and strain softening on the vertical penetration resistance of seabed pipelines // Géotechnique. Vol.62. 2012. No 7. P.573–582.
- [23] Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg, 1999.– 246 p.

Дата поступления  
06.07.2022

**Султанов К.С., Хусанов Б.Э., Рихсиева Б.Б. Ер ости қувурларининг грунт билан ўзаро таъсирида грунтларда силжishi тўлқинларининг тарқалиши**

**Аннотация:** Қувурнинг симметрик ўқи бўйлаб ҳаракатланганда ер ости қувурлари атрофидаги грунтларда силжishi тўлқинлари тарқалишининг икки ўлчовли масаласи сонли усул ёрдамида ечилган. Ер ости қувурининг қаттиқлик хусусияти грунтлар қаттиқлигига нисбатан катта фарқ қилганлиги туфайли ер ости қувурини абсолют қаттиқ жисм деб ҳисобланган. Қувур атрофидаги грунтни чизиқли қовушиқоқ-эластик қонун бўйича деформацияланади деб олинган. Масалани ечиш учун чекли айирмалар усулининг Уилкинс схемасини такомиллаштирилган ҳолда фойдаланилган. Ер ости қувурининг грунт билан ўзаро таъсирида тўлиқ жипслашган шартлари бажарилади деб ҳисобланган. Қувурнинг ҳаракати натижасида унинг атрофидаги грунт зарраларининг тезлиги ва тангенциал кучланишларнинг вақт бўйича ўзгаришлари олинган. Грунтнинг ўзаро таъсири қатламдан узоқлашган сари тангенциал кучланишлар қийматларининг камайиши, жумладан 50 см узоқликдаги масофада кучланиш контакт олди қатламдаги кучланишга нисбатан 3 марта камайиши аниқланган. Масалани ечими натижаларига асосан «тангенциал кучланиш - силжishi деформацияси» қовушиқоқ-эластик диаграммаси ҳам олинган. Юксизланишни ҳисобга олганда бу диаграммалар гистерезисининг дастлабки босқичи тасвирланади. Олинган натижалар ер ости қувурларининг мустаҳкамлиги бўйича ҳисоблашларда ишлатилиши мумкин бўлган ер ости қувурига грунтнинг реакцияси ва кучланганлик ҳолатини шаклланиши механизмини аниқлашга имкон беради.

**Калим сўзлар:** грунтлар; ер ости қувури; силжishiдаги ўзаро таъсир; тўлқин тарқалиши; сонли усул.

**Sultanov K.S., Khusanov B.E., Rikhsieva B.B. Shear waves propagation in soils under the underground pipeline interaction with soil**

**Abstract:** A two-dimensional axisymmetric problem of shear wave propagation around an underground pipeline under longitudinal motion of the pipeline is solved numerically. Due to the significant difference in pipeline and soil rigidity, the underground pipeline is considered a rigid undeformable body and the soil medium around the pipeline is modeled by a viscoelastic law in the form of a generalized Eyring model. To solve the problem, the finite difference method modified by the Wilkins difference scheme was used. On the contact surface of the underground pipeline with soil, the conditions of complete cohesion are fulfilled. Changes over time in shear stress, velocity and soil particle motion in the direction of the pipeline axis in fixed sections of soil are determined. The process of soil displacement around the pipeline at fixed time points is shown. The attenuation of the maximum values of wave parameters in soil in the radial direction with distance from the underground pipeline was detected. The maximum value of shear stress was reduced by three times compared with the value of shear stress at the contact with the pipeline. The effect of the load action time and unloading waves on the wave parameters in soil around the underground pipeline is also determined. Based on the results of problem solution, the viscoelastic "shear stress - shear strain" diagram was obtained. The results obtained make it possible to determine the mechanism of formation of the stress state and soil response to the underground pipeline, which can be used in the strength and reliability calculation of the pipelines.

**Keywords:** soils; underground pipeline; shear interaction; wave propagation; numerical method.

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УЧЕТ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ

Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: nodi2005@rambler.ru

**Аннотация:** В статье приведены модели нелинейного деформирования и повреждаемости трубопроводных систем при циклических нагрузениях с использованием обобщенного принципа Мазинга. На основе теории малых упруго-пластических деформаций и вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения (равновесия) при циклических нагрузениях. Рассмотрена расчетная схема подземных трубопроводов с учетом повреждаемости и взаимодействия с грунтом, а также представлена кинетика НДС в зависимости от числа цикла нагрузения. Графически показан учет влияния повреждаемости на расчётные величины.

**Ключевые слова:** трубопроводные системы; вариационный принцип; циклическое нагрузение; повреждаемость; уравнения движения.

**Введение.** Современные подземные трубопроводы представляют собой сложный комплекс инженерных сооружений. Подземные трубопроводные системы широко используются в области водоснабжения, на тепловых энергоустановках, газо- и нефтепроводах и обладают существенной спецификой конструктивных форм, технологии изготовления, условий эксплуатации и взаимодействия с окружающей средой. Несмотря на внешнюю конструктивную простоту линейной части магистрального трубопровода, ее элементы работают в условиях сложного напряженного состояния за пределами упругости под действием циклических нагрузок как по времени, так и по длине трассы. Проблема обеспечения малоциклового прочностии надежности магистральных трубопроводов – многоплановая задача. Одним из основных направлений является разработка прочностных расчетов и анализ НДС трубопроводов с учетом физических и геометрических нелинейностей [1–5].

В публикациях [4, 5] отмечается, что традиционные исследования и расчеты прочностии оказываются недостаточными для оценки эксплуатационной надежностии трубопроводов. Нарушения прочностии могут быть различными, в частности, не учет некоторых факторов, влияющих на работоспособностии трубопроводов, приводит к необходимости учета повторно - статического характера их нагрузения внутренним давлением. Отмеченное делает актуальным проведение исследований, связанных с выявлением факторов, существенно влияющих на НДС и малоцикловую прочностии трубопроводов, разработку критериев оценки поврежденностии, приводящей к разрушению.

Учитывая разнообразие конструктивных схем, геометрическую нелинейностии системы, характер взаимодействия подземных трубопроводов с грунтом и невозможностии получения аналитических решений для оценки несущей способностии и анализа напряженно - деформированного состояниия трубопроводов в замкнутом виде, для решения краевых задач используются численные методы расчета. Поэтому наиболее перспективным направлением по проблеме малоциклового прочностии трубопроводов представляется созданиие методики расчета, основанной на расчетных схемах, адекватно описывающих геометрию и её эксплуатационный режим нагрузения [6–12].

Наличие повреждений и различного рода дефектов приводит к существенному снижению прочностии трубопровода, долговечностии конструкции и способствует преждевременному её разрушению [13]. Разрушения магистрального трубопровода приводят к большим материальным затратам на ликвидацию аварий и загрязнениия окружающей среды, а также к вынужденному простоию транспортировки газа и нефти. Поэтому большое значение имеет анализ причин поврежденностии и разрушения.

Исследование напряженно - деформированного состояниия трубы с повреждениями вызывает значительные трудности, поскольку в локальных зонах концентрации напряжений значительно превышают предел текучестии и расчет выполняется в упругопластической области.

Известно, что при расчете элементов конструкций и сооружений при однократных и циклических нагружениях используется, главным образом, теория малых упругопластических деформаций, сформулированная А.А. Ильюшиным – В.В. Москвитиным [14, 15]. Для решения упругопластических задач ими предложен эффективный метод – упругих решений. В настоящее время существует ряд удобных модификаций этого метода, позволяющих ускорить сходимость итерационных процессов [6, 16, 17]. В работах Т. Буриева [6] рассматриваются вопросы реализации на ЭВМ, построения алгоритмической системы расчета несущих элементов конструкций в пределах и за пределами упругости при переменных нагружениях. В работе [16] изложены постановка, результаты численного исследования НДС упругих, упругопластических стержней и пластинок на упругом основании.

Заметим, что отличительной чертой сопротивления материалов малоциклового деформированию является непостоянство диаграмм деформирования с изменением числа циклов, в результате чего перераспределяются напряжения и деформации в ходе циклического нагружения за пределами упругости [13, 15, 17].

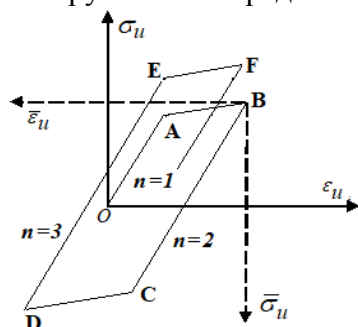


Рис. 1. Диаграмма циклического нагружения

Для описания упругопластических свойств материалов трубопровода при циклических нагружениях используются обобщенный принцип Мазинга и обобщенная диаграмма деформирования Гусенкова – Шнейдеровича [15–17]. В первом случае считается, что кривая переменного нагружения совпадает с кривой исходного нагружения, но с изменением масштаба в  $\alpha_n$  раз (рис. 1):

$$\bar{\sigma}_u^{(n)} = \alpha_n \sigma_s \Phi' \left( \frac{\bar{\epsilon}_u^{(n)}}{\alpha_n \epsilon_s} \right), \quad \alpha_n = Q(n-1)^m.$$

Создание методов расчета элементов конструкций на прочность при повторно-статическом малоциклового нагружении стало возможным в результате экспериментального и теоретического изучения закономерности циклического деформирования материалов в упругопластической области.

В работах [18–21] определены параметры, характеризующие нелинейные упругие, упругопластические и вязкопластические свойства взаимодействия подземного трубопровода с грунтом. На основе результатов экспериментов по определению коэффициента взаимодействия [18] построены кривые ползучести и релаксации взаимодействия и определены соответствующие интегральные соотношения на основе наследственной теории вязкоупругости. Работа [22] посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию взаимодействия твердых тел с грунтом. На основе результатов экспериментов построены локальные законы взаимодействия протяженных подземных сооружений с грунтами нарушенной и ненарушенной структуры.

Прикладная теория стержней [23], основанная на наглядных гипотезах, проверяемых экспериментами, позволяет сделать переход от исследования колебаний трехмерных тел к одномерным и даёт возможность изучить напряженно-деформированное состояние подземных трубопроводов, взаимодействующих с грунтом по линейному и нелинейному закону деформирования с учетом повреждаемости материалов [24–26].

Из краткого обзора следует, что в настоящее время актуальными остаются решение задачи деформирования трубопроводов, разработка методов расчета при пространственно-переменном нагружении с учетом упругопластических свойств элементов, изучение влияния физико-механических характеристик композитных материалов, взаимодействующих с окружающей средой. Следует также развивать исследования по определению НДС надземных и подземных сооружений с учетом повреждаемости и конечных деформаций при однократных, циклических и сейсмических нагрузках с учетом тепловых и радиационных воздействий.

**Цель задачи и методы расчета.** Из краткого обзора следует, что в данном направлении важнейшими задачами являются разработка моделей деформирования неупругих элементов магистральных трубопроводов с учетом повреждаемости и взаимодействие с грунтом, а также совершенствование методики расчета при повторно-переменных нагружениях с учетом обобщенного принципа Мазинга в текущих координатах. Целью задачи является разработка моделей нелинейного деформирования трубопроводов на основе деформационной теории пластичности и вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, вывод системы дифференциальных уравнений движения (равновесия) при переменном нагружении. Сформирована краевая задача, которая решается с применением метода конечных разностей и метода «упругих» решений Ильюшина, с учетом повреждаемости и вязкоупругих свойств грунта.

**Постановка задачи.** Следуя теории В.В. Москвитина [15], введем разности

$$\bar{u}_i^{(n)} = (-1)^n (u_i^{(n-1)} - u_i^{(n)}); \bar{e}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (e_{ij}^{(n-1)} - e_{ij}^{(n)}); \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = (-1)^n (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}). \quad (1)$$

Перемещения конструкции представим в цилиндрических координатах ( $x=x, y=rcos\gamma, z=rsin\gamma$ ) [23]:

$$\bar{u}_1^{(n)}(x, r, \gamma, t) = \bar{u}^{(n)}(x, t) - \bar{\alpha}_1^{(n)}(x, t)r \cos \gamma - \bar{\alpha}_2^{(n)}(x, t)r \sin \gamma + \bar{\varphi}^{(n)}(x, t) + a_1 \beta_1^{(n)}(x, t) + a_2 \beta_2^{(n)}(x, t), \quad (2)$$

$$\bar{u}_2^{(n)}(x, r, \gamma, t) = \bar{v}^{(n)}(x, t) - \bar{\theta}^{(n)}(x, t)r \sin \gamma, \quad \bar{u}_3^{(n)}(x, r, \gamma, t) = \bar{w}^{(n)}(x, t) + \bar{\theta}^{(n)}(x, t)r \cos \gamma,$$

где  $\bar{u}^{(n)}, \bar{v}^{(n)}, \bar{w}^{(n)}$  – компоненты перемещений при  $n$ -ном нагружении;  $\bar{\alpha}_1^{(n)}, \bar{\alpha}_2^{(n)}$  – углы поворота сечения при чистом изгибе при  $n$ -ном нагружении;  $\bar{\beta}_1^{(n)}, \bar{\beta}_2^{(n)}$  – углы поперечного сдвига;  $\bar{\theta}^{(n)}$  – угол кручения;  $\bar{v}^{(n)}$  – погонная закрутка при  $n$ -ном нагружении;  $\bar{\varphi}$  – функция кручения Сен-Венана.

Согласно формуле Коши, с учетом (2) определяем компоненты деформации при  $n$ -ном нагружении:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(n)} &= \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - r \cos \gamma \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - r \sin \gamma \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \phi(r, \gamma) \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} + a_1(r, \gamma) \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + a_2(r, \gamma) \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x}, \\ \varepsilon_{13}^{(n)} &= \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + r \cos \gamma \frac{\partial \theta_1^{(n)}}{\partial x} - \alpha_2^{(n)} + \left( \sin \gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) v^{(n)} + \\ &+ \left( \sin \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \beta_1^{(n)} + \left( \sin \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \beta_2^{(n)}, \\ \varepsilon_{12}^{(n)} &= \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} - r \sin \gamma \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_1 + \left( \cos \gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) v^{(n)} + \\ &+ \left( \cos \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \beta_1^{(n)} + \left( \cos \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \beta_2^{(n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь искомые величины  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \theta^{(n)}, v_1^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}$  являются функциями по пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ .

При переменном нагружении компоненты напряжений связаны через деформации следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= 3G \left\{ e_{11}^{(k)} - \left[ \omega^{(k)} e_{11}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{11}^{0(k-m)} \right] \right\}, \quad \sigma_{13}^{(k)} = G \left\{ e_{13}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{e}_{13}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{13}^{0(k-m)} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= G \left\{ e_{12}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{e}_{12}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{e}_{12}^{0(k-m)} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

При линейном упрочнении для функции пластичности имеем:

$$\omega^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} \leq \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \\ \lambda_n \left[ 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(n)}} \right]^{\tilde{\alpha}_1}, & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} > \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) \end{cases}$$

В случае обобщенного принципа Мазинга  $\lambda_n = \lambda$ ,  $\bar{\varepsilon}_u^{(n)} = \alpha_n \varepsilon_s$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 1$ , а при учете накопления повреждений:

$$\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) = \alpha_1^{n-z} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s + (3G)^{-1} B^{1/\alpha} \cdot [1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2}] [1 - (1 - \eta)^{1+\alpha}]^{1/\alpha} (n-1)^{-1/\alpha}.$$

Функция повреждаемости  $\eta$  определяется по формуле [15]

$$\frac{d\eta}{dn} = f(\bar{\sigma}_u, \eta_n), \quad f = A \frac{(\bar{\sigma}_u^{(n)})^\alpha}{(1 - \gamma_1 \eta_n)^\beta} \quad (5)$$

при условии  $\eta(0)=0$ ,  $\eta(N)=1$ , где  $N$  – число полупериодов до наступления предельного состояния (разрушения).

**Вывод уравнения движения (равновесия).** Для вывода уравнений движения трубопровода при пространственном нагружении с учетом упругопластических деформаций используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [23]

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0. \quad (6)$$

Сначала определим вариации кинетической энергии

$$\delta \int_t T dt = \int_t \int_v \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \cdot \delta \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \right) dv dt.$$

Выполняя операции интегрирования по частям, получим

$$\delta \int_t T dt = \int_v \rho \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \cdot \delta u_i^n \right] dv \Big|_t - \int_t \int_v \rho \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} \cdot \delta u_i^n \right] dv dt. \quad (7)$$

Раскроем скобки и выполним операции интегрирования по сечению трубы, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \int_F dF &= F_x; \int_F \varphi dF = S_\varphi; \int_F r \cos \gamma dF = S_z; \int_F r \sin \gamma dF = S_y; \int_F a_1 dF = S_{a_1}; \int_F a_2 dF = S_{a_2}; \\ \int_F (r \cos \gamma)^2 dF &= J_z; \int_F (r \sin \gamma)^2 dF = J_y; \int_F \rho^2 dF = J_\rho; \int_F r^2 \cos \gamma \cdot \sin \gamma dF = J_{yz}; \int_F \varphi^2 dF = J_\varphi; \\ \int_F a_1 \varphi dF &= J_{a_1 \varphi}; \int_F a_2 \varphi dF = J_{a_2 \varphi}; \int_F r \sin \gamma a_1 dF = J_{za_1}; \int_F r \sin \gamma a_2 dF = J_{za_2}; \int_F r \cos \gamma a_1 dF = J_{ya_1}; \\ \int_F r \cos \gamma \varphi dF &= J_{y\varphi}; \int_F r \sin \gamma \varphi dF = J_{z\varphi}; \int_F a_1^2 dF = J_{a_1}; \int_F a_2^2 dF = J_{a_2}; \int_F a_1 a_2 dF = J_{a_1 a_2}; \int_F r \cos \gamma a_2 dF = J_{ya_2}. \end{aligned}$$

С учетом обозначений запишем кинетическую энергию (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \int_t T dt &= \int_x \left[ F \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} - S_z \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial t} - S_y \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial t} + S_\varphi \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} + S_{a_1} \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial t} + S_{a_2} \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial t} \right] \delta u + \left[ F \frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} - \right. \\ &- S_y \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} \left. \right] \delta v + \left[ F \frac{\partial w}{\partial t} + S_z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta w - \left[ S_z \frac{\partial u}{\partial t} - J_z \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{y\varphi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{ya_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \right. \\ &+ J_{ya_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \left. \right] \delta \alpha_1 - \left[ S_y \frac{\partial u}{\partial t} - J_{yz} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_y \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{z\varphi} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{za_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{za_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \alpha_2 + \left[ S_\varphi \frac{\partial u}{\partial t} - \right. \\ &- J_{y\varphi} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{z\varphi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_\varphi \frac{\partial v}{\partial t} + J_{\varphi a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{\varphi a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \left. \right] \delta v + \left[ S_z \frac{\partial w}{\partial t} - S_y \frac{\partial v}{\partial t} + J_\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \delta \theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ S_{a_1} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{y a_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{z a_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\phi a_1} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_1 + \\
& + \left[ S_{a_2} \frac{\partial u}{\partial t} - J_{y a_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - J_{z a_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + J_{\phi a_2} \frac{\partial v}{\partial t} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + J_{a_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right] \delta \beta_2 \Big\} dx \Big|_t - \\
& - \int \int_x \left[ F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - S_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + S_\phi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + S_{a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + S_{a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta u - \left[ S_z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_z \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \right. \\
& - J_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{y\phi} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_{y a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{y a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \Big] \delta \alpha_1 - \left[ S_y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{yz} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_y \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{z\phi} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \right. \\
& + J_{z a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{z a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \Big] \delta \alpha_2 + \left[ S_\phi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{\phi z} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_{z\phi} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_\phi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_{\phi a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{\phi a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta v + \\
& + \left[ S_{a_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{y a_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - J_{z a_1} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{a_1 \phi} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_{a_1} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \right] \delta \beta_1 + \left[ S_{a_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - J_{y a_2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \right. \\
& - J_{z a_2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} + J_{\phi a_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + J_{a_2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} \Big] \delta \beta_2 + \left[ S_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + J_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] + \\
& + \left[ F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - S_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta v + \left[ F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + S_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] \delta w \Big\} dx dt. \tag{8}
\end{aligned}$$

Вариации кинетической энергии (8) запишем в векторном виде

$$\delta \int_t T dt = \int_x \tilde{A} \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial t} E \delta Y^{(n)} dx \Big|_t - \int \int_x \tilde{A} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} E \delta Y dx dt, \tag{9}$$

где  $Y^{(n)} = \{u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \theta^{(n)}, v_1^{(n)}, \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}\}$  – вектор перемещения;  $\tilde{A}$  – матрица девятого порядка;  $E$  – единичная матрица.

Для вариации потенциальной энергии имеем следующее:

$$\begin{aligned}
\delta \int_t \Pi dt & = \int \int_v \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_{i1}^{(n)} \delta e_{i1}^{(n)} \right) dv = \int \int_v \left\{ \sigma_{11}^{(n)} \delta \left( \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - r \cos \gamma \frac{\partial \alpha_1^{(n)}}{\partial x} - r \sin \gamma \frac{\partial \alpha_2^{(n)}}{\partial x} + \phi \frac{\partial v_1^{(n)}}{\partial x} + \right. \right. \\
& + a_1 \frac{\partial \beta_1^{(n)}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \beta_2^{(n)}}{\partial x} \Big) + \sigma_{13}^{(n)} \delta \left[ \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} + r \cos \gamma \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_2 + \left( \sin \gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) v_1^{(n)} + \right. \\
& + \left. \left( \sin \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \beta_1^{(n)} + \left( \sin \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{r} \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \beta_2^{(n)} \right] + \\
& \sigma_{12}^{(n)} \delta \left[ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} - r \sin \gamma \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} - \alpha_1^{(n)} + \left( \cos \gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) v^{(n)} + \right. \\
& + \left. \left( \cos \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \beta_1^{(n)} + \left( \cos \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \beta_2^{(n)} \right] \Big\} dv dt. \tag{10}
\end{aligned}$$

Преобразуем вариации потенциальной энергии (10). Для этого раскроем скобки и выделим интеграл по сечению трубы:

$$\begin{aligned}
\delta \int_t \Pi dt = & \int_t \left\{ N_x^{(n)} \delta u^{(n)} - M_z^{(n)} \delta \alpha_1^{(n)} - M_y^{(n)} \delta \alpha_2^{(n)} + Q_y^{(n)} \delta v^{(n)} + Q_z^{(n)} \delta w^{(n)} + M_x^{(n)} \delta \theta^{(n)} + \right. \\
& + M_\varphi^{(n)} \delta v_1^{(n)} + M_{\alpha_1}^{(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{\alpha_2}^{(n)} \delta \beta_2^{(n)} \left. \right\} dt \Big|_x - \int_t \int_x \left\{ \frac{\partial N_x^{(n)}}{\partial x} \delta u^{(n)} + \frac{\partial Q_y^{(n)}}{\partial x} \delta v^{(n)} + \frac{\partial Q_z^{(n)}}{\partial x} \delta w^{(n)} + \right. \\
& + \left( Q_y^{(n)} - \frac{\partial M_z^{(n)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_1^{(n)} + \left( Q_z^{(n)} - \frac{\partial M_y^{(n)}}{\partial x} \right) \delta \alpha_2^{(n)} + \frac{\partial M_x^{(n)}}{\partial x} \delta \theta^{(n)} + \left( \frac{\partial M_\varphi^{(n)}}{\partial x} - Q_{v_1}^{(n)} \right) \delta v_1^{(n)} + \\
& \left. + \left( \frac{\partial M_{\alpha_1}^{(n)}}{\partial x} - Q_{\beta_1}^{(n)} \right) \delta \beta_1^{(n)} + \left( \frac{\partial M_{\alpha_2}^{(n)}}{\partial x} - Q_{\beta_2}^{(n)} \right) \delta \beta_2^{(n)} \right\} dx dt. \tag{11}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\int_F r \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = N_x^{(n)}; \quad \int_F r \sigma_{12}^{(n)} dr d\gamma = Q_y^{(n)}; \quad \int_F r^2 \cos \gamma \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = M_z^{(n)}; \\
\int_F \left( r^2 \cos \gamma \sigma_{13}^{(n)} - r^2 \sin \gamma \sigma_{12}^{(n)} \right) dr d\gamma = M_x^{(n)}; \quad \int_F r^2 \sin \gamma \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = M_y^{(n)}; \\
\int_F r \sigma_{13}^{(n)} dr d\gamma = Q_z^{(n)}; \quad \int_F r \varphi \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = M_\varphi^{(n)}; \quad \int_F r a_1 \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = M_{\alpha_1}^{(n)}; \quad \int_F r a_2 \sigma_{11}^{(n)} dr d\gamma = M_{\alpha_2}^{(n)}; \tag{12} \\
\int_F \left[ \left( r \sin \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \cos \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) \sigma_{13}^{(n)} + \left( r \cos \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \sin \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) \sigma_{12}^{(n)} \right] dr d\gamma = Q_v^{(n)}; \\
\int_F \left[ \left( r \sin \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} + \cos \gamma \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \sigma_{13}^{(n)} + \left( r \cos \gamma \frac{\partial a_1}{\partial r} - \sin \gamma \frac{\partial a_1}{\partial \gamma} \right) \sigma_{12}^{(n)} \right] dr d\gamma = Q_{\beta_1}^{(n)}; \\
\int_F \left[ \left( r \sin \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} + \cos \gamma \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \sigma_{13}^{(n)} + \left( r \cos \gamma \frac{\partial a_2}{\partial r} - \sin \gamma \frac{\partial a_2}{\partial \gamma} \right) \sigma_{12}^{(n)} \right] dr d\gamma = Q_{\beta_2}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются интегралы  $F_\omega$ ,  $J_{a_2}^\omega$ , содержащие функции пластичности  $\omega$ , например,

$$\tilde{F}_\omega = \int_F \omega r dr d\gamma, \dots, \quad J_{a_2}^\omega = \int_F \omega a_2^2(r, \gamma) r dr d\gamma \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя выражения усилий (12) в вариации потенциальной энергии, после некоторых обозначений получим

$$\begin{aligned}
\delta \int_t \Pi dt = & \int_t \left\{ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dt \Big|_t + \int_t \int_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (B^{yn} - B^{nl}) Y^{(n)} \right) + (C^{yn} - C^{nl}) \frac{\partial Y^{(n)}}{\partial x} + (D^{yn} - D^{nl}) Y^{(n)} \right\} E \delta Y^{(n)} dx dt. \tag{13}
\end{aligned}$$

Рассмотрим вариации работы внешних сил:

$$\delta A = \int_v \sum_{i=1}^3 p_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} dv + \int_s \sum_{i=1}^3 q_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} ds + \int_{s_1} \sum_{i=1}^3 f_i^{(n)} \delta u_i^{(n)} ds_1 \Big|_x, \tag{14}$$

где  $q_i^{(n)}$  – поверхностные силы;  $p_i^{(n)}$  – объемные силы при  $n$ -ном нагружении;  $f_i^{(n)}$  – торцевые силы.

К соотношению (14) подставляем выражения перемещений (2) и выполним интегрирование по поперечным сечениям трубопровода:



$$\begin{aligned}
\delta \int_t Adt = & \int_t \int_x \left\{ \int_F [p_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - r \cos \gamma \alpha_1^{(n)} - r \sin \gamma \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + \right. \\
& + p_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - r \sin \gamma \theta^{(n)}) + p_1^{(n)} \delta(w^{(n)} + r \cos \gamma \theta^{(n)})] dF \Big\} dxdt + \int_t \int_x \left\{ \int_l [q_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - r \cos \gamma \alpha_1^{(n)} - \right. \\
& - r \sin \gamma \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + q_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - r \sin \gamma \theta^{(n)}) + q_3^{(n)} \delta(w^{(n)} + r \cos \gamma \theta^{(n)})] dl \Big\} dxdt + (15) \\
& + \int_t \left\{ \int_{s_1} [f_1^{(n)} \delta(u^{(n)} - r \cos \gamma \alpha_1^{(n)} - r \sin \gamma \alpha_2^{(n)} + \phi v^{(n)} + a_1 \beta_1^{(n)} + a_2 \beta_2^{(n)}) + \right. \\
& \left. f_2^{(n)} \delta(v^{(n)} - r \sin \gamma \theta^{(n)}) + f_3^{(n)} \delta(w^{(n)} + r \cos \gamma \theta^{(n)}) \right\} dS_1 \Big|_x.
\end{aligned}$$

Используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\int_F r \cos \gamma p_1^{(n)} dF = M_z^{o\delta(n)}; \quad \int_F p_1^{(n)} dF = N_x^{o\delta(n)}; \quad \int_F r \sin \gamma p_1^{(n)} dF = M_y^{o\delta(n)}; \\
\int_F \phi p_1^{(n)} dF = M_\phi^{o\delta(n)}; \quad \int_F a_1 p_1^{(n)} dF = M_{a_1}^{o\delta(n)}; \quad \int_F a_2 p_1^{(n)} dF = M_{a_2}^{o\delta(n)}; \\
\int_F (r \cos \gamma p_3^{(n)} - r \sin \gamma p_2^{(n)}) dF = M_x^{o\delta(n)}; \quad \int_F p_2^{(n)} dF = Q_y^{o\delta(n)}; \quad \int_F p_3^{(n)} dF = Q_z^{o\delta(n)}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются поверхностные и торцевые нагрузки, например,  $N_x^{II(n)}$ ,  $N_x^{I(n)}$ . Теперь перепишем соотношение (15) в виде

$$\begin{aligned}
\delta \int_t Adt = & \int_t \int_x \left\{ (N_x^{o\delta(n)} - N_x^{II(n)}) \delta u^{(n)} + (Q_y^{o\delta(n)} + Q_y^{II(n)}) \delta v^{(n)} + (Q_z^{o\delta(n)} + Q_z^{II(n)}) \delta w^{(n)} - (M_z^{o\delta(n)} + M_z^{II(n)}) \delta \alpha_1^{(n)} + \right. \\
& - (M_y^{o\delta(n)} + M_y^{II(n)}) \delta \alpha_2^{(n)} - (M_x^{o\delta(n)} + M_x^{II(n)}) \delta \theta^{(n)} + (M_\phi^{o\delta(n)} + M_\phi^{II(n)}) \delta v^{(n)} + (M_{a_1}^{o\delta(n)} + M_{a_1}^{II(n)}) \delta \beta_1^{(n)} - \\
& + (M_{a_2}^{o\delta(n)} - M_{a_2}^{II(n)}) \delta \beta_2^{(n)} \Big\} dxdt + \int_t \left\{ N_x^{I(n)} \delta u^{(n)} + Q_y^{I(n)} \delta v^{(n)} + Q_z^{I(n)} \delta w^{(n)} - M_z^{I(n)} \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\
& - M_y^{I(n)} \delta \alpha_2^{(n)} - M_x^{I(n)} \delta \theta^{(n)} + M_\phi^{I(n)} \delta v^{(n)} + M_{a_1}^{o\delta(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{a_2}^{o\delta(n)} \delta \beta_2^{(n)} \Big\} dt \Big|_x.
\end{aligned} \quad (16)$$

Вариации работ внешних сил (16) можно представить в векторном виде

$$\delta \int_t Adt = \int_t Q^{zp} \delta y dt \Big|_t + \int_t \int_x Q^H dy dxdt. \quad (17)$$

Подставляя векторные выражения (11), (13) и (17) в (6), получим:

$$\begin{aligned}
\int_t \int_x \left\{ \tilde{A} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y \right] + (C^{yn} - C^{nl}) \frac{\partial Y}{\partial x} + (D^{yn} - D^{nl}) Y + Q \right\} E \delta Y dxdt + \\
+ \int_t \left\{ (A^{yn} - A^{nl}) \frac{\partial Y}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl}) Y + Q^{zp} \right\} E \delta Y dt \Big|_x + \int_x \tilde{A} \frac{dY}{dt} E \delta Y dx \Big|_t = 0
\end{aligned} \quad (18)$$

Из этого вариационного уравнения получаем следующую краевую задачу для  $k$ -го нагружения и разгружения в векторном виде:

уравнения движения

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (A^{yn} - A^{nl(k)}) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + (B^{yn} - B^{nl(k)}) Y^{(k)} \right] + (C^{yn} - C^{nl(k)}) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + \\
+ (D^{yn} - D^{nl(k)}) Y^{(k)} = Q_n^{(k)} + \frac{\partial}{\partial x} \left( A^{nl(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + B^{nl(k)} Y^{0(k-1)} \right) + C^{nl(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} + \\
+ D^{nl(k)} Y^{0(k-1)} + \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ A^{n\lambda o(k-m)} \frac{\partial (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)})}{\partial x} + B^{n\lambda o(k-m)} (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)}) \right] + \right. \\
\left. + C^{n\lambda o(k-m)} \frac{\partial (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)})}{\partial x} + D^{n\lambda o(k-m)} (Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)}) \right\},
\end{aligned} \quad (19)$$

граничные условия

$$\left\{ \left( A^{yn} - A^{nl(k)} \right) \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial x} + \left( B^{yn} - B^{nl(k)} \right) Y^{(k)} - \bar{Q}_{cp}^{(k)} - B^{nlo(k)} Y^{0(k-1)} - A^{nlo(k)} \frac{\partial Y^{0(k-1)}}{\partial x} - \sum_{m=1}^{k-1} \left[ A^{nlo(k-m)} \frac{\partial}{\partial x} \left( Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) + B^{nlo(k-m)} \left( Y^{0(k-m)} - Y^{0(k-m-1)} \right) \right] \right\} \delta Y^{(k)} \Big|_x = 0, \quad (20)$$

начальные условия

$$\tilde{A} \frac{dY^{(n)}}{dt} E \delta Y^{(n)} \Big|_t = 0. \quad (21)$$

Здесь  $A, B, C, D$  – квадратичные матрицы девятого порядка;  $Q_n$  и  $Q_{cp}$  – векторы внешних сил девятого порядка и коэффициенты имеют следующей вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & a_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ a_{71} & 0 & 0 & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & 0 & 0 & a_{84} & a_{85} & 0 & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{91} & 0 & 0 & a_{94} & a_{95} & 0 & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b_{14} & b_{15} & 0 & b_{17} & b_{18} & b_{19} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 & b_{36} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & 0 & b_{47} & b_{48} & b_{49} \\ b_{51} & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} & 0 & b_{57} & b_{58} & b_{59} \\ 0 & b_{62} & b_{63} & 0 & 0 & b_{66} & 0 & 0 & 0 \\ b_{71} & 0 & 0 & b_{74} & b_{75} & 0 & b_{77} & b_{78} & b_{79} \\ b_{81} & 0 & 0 & b_{84} & b_{85} & 0 & b_{87} & b_{88} & b_{89} \\ b_{91} & 0 & 0 & b_{94} & b_{95} & 0 & b_{97} & b_{98} & b_{99} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & 0 & c_{17} & c_{18} & c_{19} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & c_{26} & c_{27} & c_{28} & c_{29} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} & c_{37} & c_{38} & c_{39} \\ c_{41} & c_{42} & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} & c_{48} & c_{49} \\ c_{51} & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} & c_{59} \\ 0 & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} & c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} \\ c_{91} & c_{92} & c_{93} & c_{94} & c_{95} & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99} \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & d_{27} & d_{28} & d_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{35} & 0 & d_{37} & d_{38} & d_{39} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 & d_{47} & d_{48} & d_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 & d_{57} & d_{58} & d_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{67} & d_{68} & d_{69} \\ 0 & 0 & 0 & d_{74} & d_{75} & 0 & d_{77} & d_{78} & d_{79} \\ 0 & 0 & 0 & d_{84} & d_{85} & 0 & d_{87} & d_{88} & d_{89} \\ 0 & 0 & 0 & d_{94} & d_{95} & 0 & d_{97} & d_{98} & d_{99} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij} = a_{ij}^{yn} - a_{ij}^{nl(n)}$ ;  $b_{ij} = b_{ij}^{yn} - b_{ij}^{nl(n)}$ ;  $c_{ij} = c_{ij}^{yn} - c_{ij}^{nl(n)}$ ;  $d_{ij} = d_{ij}^{yn} - d_{ij}^{nl(n)}$ .

Аналогичным образом определяются элементы матрицы  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$  и интегралы  $F_\omega^{(n)}$ , ...,  $S_{y\omega}^{(n)}$ , содержащие функции пластичности  $\omega^{(n)}$ , например:

$$F_\omega^{(n)} = \int_F \omega^{(n)} dF, \dots, I_\omega^{a_2\varphi} = \int_F \omega^{(n)} a_2 \varphi dF.$$

Внутренние усилия и моменты представим в векторной форме

$$P^{(n)}(x, t) = \frac{3Gh_0 I_0}{l^3} \left\{ \left( \tilde{A}^{yn} - \tilde{A}^{nl(n)} \right) \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + \left( \tilde{B}^{yn} - \tilde{B}^{nl(n)} \right) \mu^{(n)} \right\},$$

где  $P^{(n)}(x, t) = \{N_x^{(n)}, M_y^{(n)}, M_z^{(n)}, M_\phi^{(n)}, M_{a_1}^{(n)}, M_{a_2}^{(n)}, Q_1^{(n)}, M_x^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_{a_1}^{(n)}, Q_{a_2}^{(n)}, M_\phi^{(n)}\}$ .

Здесь элементы матрицы  $\tilde{A}^{yn}$ ,  $\tilde{A}^{nl(n)}$ ,  $\tilde{B}^{yn}$ ,  $\tilde{B}^{nl(n)}$  описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_{ij}^{yn}; \quad \tilde{a}_{10,s} = b_{s,5}; \quad \tilde{a}_{11,s} = b_{s,6}; \quad \tilde{a}_{12,s} = b_{s,4}; \quad \tilde{b}_{ij} = b_{ij}; \\ \tilde{b}_{10,r} &= d_{2,s}; \quad \tilde{b}_{11,r} = d_{r,6}; \quad \tilde{b}_{12,r} = d_{r,4}; \quad (i, j=1, 2, \dots, 9; \quad s=7, 8, 9; \quad r=2, 3, 4, 5, 6). \\ \tilde{b}_{10,r} &= d_{2,s}; \quad \tilde{b}_{11,r} = d_{r,6}; \quad \tilde{b}_{12,r} = d_{r,4}. \end{aligned}$$

**Пример расчета.** Из системы уравнений (19) – (21) вытекает система дифференциальных уравнений равновесия с граничными условиями, которая решается с использованием метода конечных разностей и метода «упругих» решений. За кинетическое уравнение принято  $\frac{d\eta}{dn} = A(1 - \gamma_1 \eta^r)^{-\beta} (\bar{\sigma}_u^{(n)})^\alpha$ . Задача решена при следующих исходных данных: материальные константы кинетического уравнения повреждаемости -  $A=1.2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha=\beta=5$ ;  $\gamma_1=0.8$ ;  $r=1.2$ ;  $\alpha_I=0.97$ ;  $B=1.4 \cdot 10^3$ ;  $\varepsilon_s=0.0015$ . За внешнюю нагрузку приняты следующие значения:  $f_0^+ = 25$ ;  $f_0^- = 50$ ;  $\bar{f}_0^+ = 10$ ;  $\bar{f}_0^- = 5$ ; (кг/см<sup>2</sup>);  $\alpha=\pi/3$ ;  $\alpha^* = \pi/2$ ;  $\gamma = \pi/4$ ;  $\gamma^* = \pi/6$ . Приведем результаты расчета трубопровода, заземленного по торцам при знакопеременном нагружении. Численные результаты вектора перемещений в зависимости от числа итераций  $\gamma$  и числа циклов  $k$  (при  $N=40$ ,  $k=1$  и  $k=5$ ) приводятся с использованием обобщенного принципа Ма-зинга в табличном виде. Для иллюстрации на рис. 2 показаны изменения перемещений  $W^{(k)}$ ,  $\alpha_1^{(k)}$  по длине стержня (табл. 1, 2).

Таблица 1

Численные значения расчетных величин – перемещений

Расчетная величина	$x$	$W^{(k)}$	$\alpha_1^{(k)}$	$\alpha_2^{(k)}$	$V^{(k)}$
$k=1$	0.1	-0.038498	-0.724490	-0.679278	-0.036098
	0.2	-0.124965	-0.965903	-0.905623	-0.117170
	0.4	-0.284147	-0.482706	-0.452569	-0.266419
	0.6	-0.284124	0.483426	0.453289	-0.266396
	0.8	-0.124919	0.966394	0.906114	-0.117123
	0.9	-0.038463	0.724772	0.679560	-0.036062
$k=5$	0.1	-0.038502	-0.724583	-0.679373	-0.036101
	0.2	-0.124982	-0.966050	-0.905770	-0.117186
	0.4	-0.284190	-0.482782	-0.452642	-0.266462
	0.6	-0.284166	0.483511	0.453370	-0.266438
	0.8	-0.124934	0.966536	0.906256	-0.117138
	0.9	-0.038467	0.724856	0.679646	-0.036066

Таблица 2

Численные значения расчетных величин – усилий

Расчетная величина	$x$	$Q_1^{(k)}$	$M_y^{(k)}$	$Q_2^{(k)}$	$M_z^{(k)}$
$k=1$	0.0	14.8597	93.7650	13.9340	89.1796
	0.2	7.83433	5.85102	7.34389	5.56424
	0.4	2.59486	-41.0297	2.43147	-39.0236
	0.6	-2.64614	-41.0243	-2.48271	-39.0182
	0.8	-7.88573	5.86793	-7.39532	5.58184
	1.0	-14.8119	93.7967	-13.8862	89.2114
$k=5$	0.0	-14.8652	94.1137	13.9393	89.2166
	0.2	7.83850	5.87462	7.34794	5.56778
	0.4	2.59560	-41.1852	2.43210	-39.0421
	0.6	-2.64694	-41.1795	-2.48341	-39.0359
	0.8	-7.88983	5.89176	-7.39926	5.58623
	1.0	-14.8165	94.1454	-13.8907	89.2474

Изменения перемещений  $W^{(k)}$ ,  $\alpha_1^{(k)}$  и моментов  $M_y^{(k)}$ ,  $M_z^{(k)}$  по длине стержня при повторно-переменном упругопластическом нагружении показаны на рис. 2 и 3 (где  $\delta$ –интенсивность нагрузки).

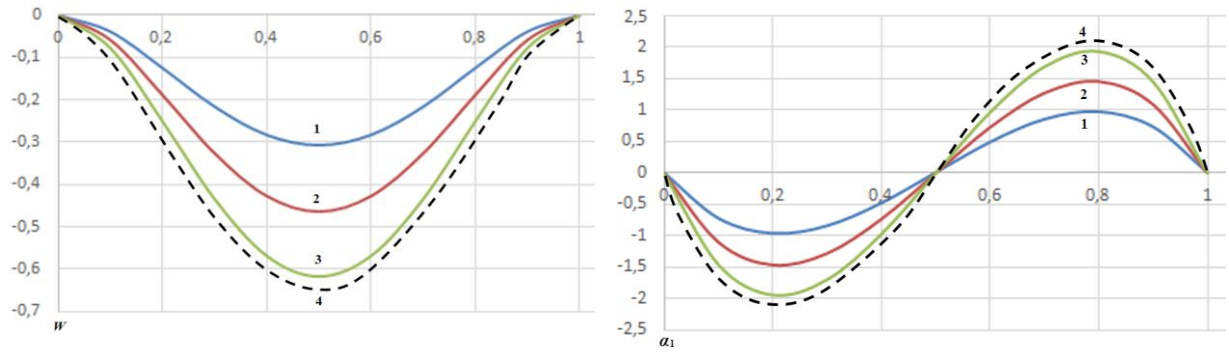


Рис. 2. Изменение перемещений по длине трубы с учетом повреждаемости: 1– $\delta=1$ ; 2– $\delta=1,5$ ; 3– $\delta=2$ ; 4– $\delta=2$

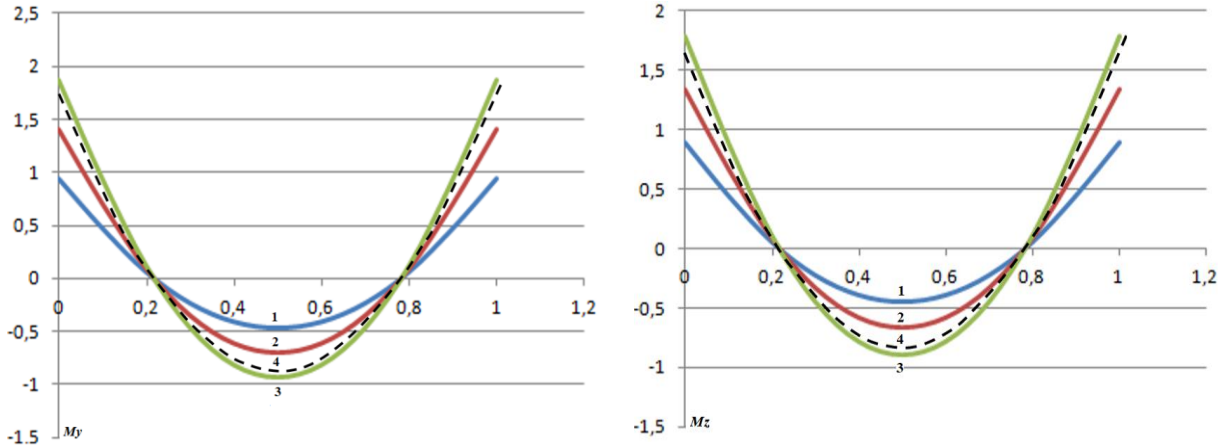


Рис. 3. Изменения моментов по длине трубы: 1– $\delta=1$ ; 2– $\delta=1,5$ ; 3– $\delta=2$ ; 4– $\delta=2$

Анализ численного эксперимента показывает, что с увеличением числа циклов нагружения изменяются значения функции пластичности и повреждаемости. В свою очередь это влияет на кинетику перемещений, усилий и моментов упругопластического трубопровода.

**Учет повреждаемости при взаимодействии трубопровода с грунтом.** В случае учета силы взаимодействия трубопровода с грунтом поверхностные силы  $q_i^{(n)}$  и торцевые  $f_i^{(n)}$  принимаются в следующем виде [18, 19]:

$$\begin{aligned} q_i^{(n)} &= -k_i^{(n)}(u_i^{(n)} - u_i^{0(n)}) + \bar{q}_i^{(n)}; \\ f_i^{(n)} &= -k_i^{zp(n)}(u_i^{(n)} - u_i^{0(n)}) + \bar{f}_i^{(n)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $k_i^{(n)} = k_i(1 - \omega_i^{(n)})$  – коэффициенты взаимодействия трубопровода с окружающей средой на поверхности при переменном нагружении;  $k_i^{zp(n)} = k_i^{zp}(1 - \omega_i^{zp(n)})$  – коэффициент взаимодействия трубы с окружающей средой на торцах;  $\bar{u}_i^{0(n)}$  – составляющая пространственного сейсмического перемещения грунта по координатным осям при переменном нагружении, представленные в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1^{0(n)}(x, r, \gamma, t) &= u^{0(n)} - r \cos \gamma \alpha_1^{0(n)} - r \sin \gamma \alpha_2^{0(n)} + \varphi v^{0(n)} + a_1 \beta_1^{0(n)} + a_2 \beta_2^{0(n)}; \\ u_3^{0(n)}(x, r, \gamma, t) &= w^{0(n)} + r \cos \gamma \theta; \quad u_2^{0(n)}(x, r, \gamma, t) = v^{0(n)} - r \sin \gamma \theta^{0(n)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая (22) и (23), выражения  $q_i^{(n)}$ ,  $f_i^{(n)}$  примут вид, например,

$$\begin{aligned} q_1^{(n)} &= -k_1^{(n)} \left[ (u^{(n)} - u^{0(n)}) - r \cos \gamma (\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{0(n)}) - r \sin \gamma (\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{0(n)}) + \varphi (v^{(n)} - v^{0(n)}) + \right. \\ &\quad \left. + a_1 (\beta_1^{(n)} - \beta_1^{0(n)}) + a_2 (\beta_2^{(n)} - \beta_2^{0(n)}) + \bar{q}_1^{(n)} \right]; \\ q_2^{(n)} &= -k_2^{(n)} \left[ (v^{(n)} - v^{0(n)}) - r \sin \gamma (\theta^{(n)} - \theta^{0(n)}) + \bar{q}_2^{(n)} \right]; \\ q_3^{(n)} &= -k_3^{(n)} \left[ (w^{(n)} - w^{0(n)}) + r \cos \gamma (\theta^{(n)} - \theta^{0(n)}) + \bar{q}_3^{(n)} \right]. \end{aligned}$$

Таким же образом определяем  $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}$ . Подставляя выражения  $q_i^{(n)}, f_i^{(n)}$  в вариации работы внешних сил и вводя ряд обозначений, получим соотношения вида (16) с добавлением  $N_x^{e3(n)}, Q_y^{e3(n)}, \dots, M_{a_2}^{e3(n)}$ , т.е. выражения перед вариацией  $\delta u^{(n)}, \dots, \delta \beta_2^{(n)}$  имеют следующий вид:  $(N_x^{o\delta(n)} + N_x^{II(n)} + N_x^{e3(n)}), \dots, (M_{a_2}^{o\delta(n)} + M_{a_2}^{II(n)} + M_{a_2}^{e3(n)})$ .

В этом случае, согласно (16), имеем:

$$\begin{aligned} \delta \int_t A dt = & \int_t \int_x \left\{ (N_x^{o\delta(n)} - N_x^{II(n)} + N_x^{e3(n)}) \delta u^{(n)} + (Q_y^{o\delta(n)} + Q_y^{II(n)} + Q_y^{e3(n)}) \delta v^{(n)} + (Q_z^{o\delta(n)} + Q_z^{II(n)} + \right. \\ & Q_z^{e3(n)}) \delta w^{(n)} - (M_z^{o\delta(n)} + M_z^{II(n)} + M_z^{e3(n)}) \delta \alpha_1^{(n)} - (M_y^{o\delta(n)} + M_y^{II(n)} + M_y^{e3(n)}) \delta \alpha_2^{(n)} - \\ & - (M_x^{o\delta(n)} + M_x^{II(n)} + M_x^{e3(n)}) \delta \theta^{(n)} + (M_\varphi^{o\delta(n)} + M_\varphi^{II(n)} + M_\varphi^{e3(n)}) \delta v^{(n)} + (M_{a_1}^{o\delta(n)} + M_{a_1}^{II(n)} + M_{a_1}^{e3(n)}) \delta \beta_1^{(n)} + \\ & \left. + (M_{a_2}^{o\delta(n)} - M_{a_2}^{II(n)} + M_{a_2}^{e3(n)}) \delta \beta_2^{(n)} \right\} dx dt + \int_t \left\{ N^{I(n)} \delta u^{(n)} + Q_y^{I(n)} \delta v^{(n)} + Q_z^{I(n)} \delta w^{(n)} - M_z^{I(n)} \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ & \left. - M_y^{I(n)} \delta \alpha_2^{(n)} - M_x^{I(n)} \delta \theta^{(n)} + M_\varphi^{I(n)} \delta v^{(n)} + M_{a_1}^{o\delta(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{a_2}^{o\delta(n)} \delta \beta_2^{(n)} \right\} dt \Big|_x. \end{aligned}$$

Здесь, например,

$$\begin{aligned} N_x^{e3(n)} = & -K_{N_x}^{(n)} [(u^{(n)} - u^{0(n)}) + K_{N_{a_1}}^{(n)} (\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{0(n)}) + K_{N_{a_2}}^{(n)} (\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{0(n)}) + K_{N_\varphi}^{(n)} (v^{(n)} - v^{0(n)}) - \\ & - K_{N_{\beta_1}}^{(n)} (\beta_1^{(n)} - \beta_1^{0(n)}) - K_{N_{\beta_2}}^{(n)} (\beta_2^{(n)} - \beta_2^{0(n)})], \end{aligned}$$

где  $K_{N_x}^{(n)}, K_{N_{a_1}}^{(n)}, K_{N_\varphi}^{(n)}, \dots, K_{N_{\beta_2}}^{(n)}$  – коэффициенты взаимодействия, определяемые из эксперимента при повторно - переменном нагружении. Следует отметить, что закон взаимодействия и нелинейные коэффициенты определяются экспериментальным путём с учетом степени поврежденности грунта.

В частности, при вязкоупругом взаимодействии трубопровода с окружающим грунтом, согласно принципу Вольтерра для сил взаимодействия, учитывающих повреждаемость грунта, имеем [15, 18]

$$P^b(x, t) = D_A^* (Y - Y_0) = D_A \left[ (Y - Y_0) - \int_0^t R(t' - \tau') [Y(x, \eta) - Y_0(x, \eta)] d\tau' \right]. \quad (24)$$

Для этого случая система (19) – (21) имеет вид

$$\begin{aligned} -A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + C \frac{\partial Y}{\partial x} + D_n Y + D_A (Y - Y_0) - D_A \int_0^t R(t' - \tau') [Y(x, \eta) - Y_0(x, \eta)] d\tau' + F = 0, \\ \left[ -\bar{B} \frac{\partial Y}{\partial x} + \bar{C}_\Pi Y + \bar{C}_A (Y - Y_0) - \bar{C}_A \int_0^t R(t' - \tau') [Y(x, \eta) - Y_0(x, \eta)] d\tau' + P^{2p} \right] \delta Y \Big|_x = 0, \\ A \frac{\partial Y}{\partial t} E \delta Y \Big|_t = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $R(t' - \tau')$  – слабосингулярное трехпараметрическое ядро типа Ржаницына – Колтунова, в частности, для первого приближения считается  $R(t' - \tau') = R(t - \tau)$ .

Здесь

$$R(t) = \bar{A}_b e^{-\bar{\beta} t} t^{\alpha-1}; \quad 0 < \alpha < 1. \quad (26)$$

Для устранения особенности в подынтегральном выражении, следуя методике Ф.Б. Бадалова, произведена замена переменных для фиксированных  $t_n = (n-1)\tau$ . После некоторых преобразований из системы уравнений (25) имеем

$$-A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + C \frac{\partial Y}{\partial x} + D_n Y + D_A \left[ (Y - Y_0) - \frac{A_b}{\alpha} \sum_{k=1}^n B_k^b e^{-\beta t_k} [Y(x, t_n - t_k) - Y_0(x, t_n - t_k)] \right] + F = 0; \quad (27)$$

$$\left\{ -\bar{B} \frac{\partial Y}{\partial x} + \bar{C}_{II} Y + \bar{C}_A [(Y - Y_0) - \frac{A_b}{\alpha} \sum_{k=1}^n B_k e^{-\beta t_k} [Y(x, t_n - t_k) - Y_0(x, t_n - t_k)]] + P^{ep} \right\} \delta Y \Big|_x = 0; \quad (28)$$

$$A \frac{\partial Y}{\partial t} E \delta Y \Big|_t = 0. \quad (29)$$

В случае учета накопления повреждений ядра типа  $R[t, \tau, \eta, (\xi)]$  обычно разлагаются в ряд, поэтому ограничимся первым слагаемым:

$$R[t - \xi, \eta(\xi)] = R_0(t - \xi) + \eta(\xi) R_1(t - \xi). \quad (30)$$

По аналогии с (24) в случае продольного сдвига силы взаимодействия представляем в следующем виде:

$$\tau_a = P^b(x, t) = R_0(0)[u - \psi_0(u)] - R_1(0)\psi_1(u),$$

$$\text{где } \psi_0(u) = \int_0^t R_0(t - \xi) u(\xi) d\xi, \quad \psi_1(u) = \int_0^t R_1(t - \xi) \eta(\xi) u(\xi) d\xi.$$

В случае пространственного нагружения

$$\tau_a = P^b(x, t) = R_0(0)[(Y - Y_0) - \psi_0(Y - Y_0)] - R_1(0)\psi_1(Y - Y_0), \quad (31)$$

$$\text{здесь } \psi_0(Y - Y_0) = \int_0^t R_0(t - \xi)(Y - Y_0) d\xi, \quad \psi_1(Y - Y_0) = \int_0^t R_1(t - \xi) \eta(\xi)(Y - Y_0) d\xi.$$

Система уравнений (27) – (29) с учетом (31) имеет следующей вид:

$$-A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + C \frac{\partial Y}{\partial x} + D_n Y + \tilde{D}_A [(Y - Y_0) - \psi_0(Y - Y_0)] - \tilde{D}_A \psi_1(Y - Y_0) + \bar{F} = 0; \quad (32)$$

$$\left\{ -\bar{B} \frac{\partial Y}{\partial x} - \tilde{C}_{II} [(Y - Y_0) - \psi_0(Y - Y_0)] - \tilde{C}_A \psi_1(Y - Y_0) + P^{ep} \right\} \Big|_x = 0; \quad A \frac{\partial Y}{\partial x} E \delta Y \Big|_t = 0. \quad (33)$$

Система уравнений решается методом итерации ( $l$  – число итерации), при этом, например,

$$\psi_1(Y^{(l)} - Y_0^{(l)}) = \int_0^t R_0(t - \xi) \eta^{(l-1)}(\xi) (Y^{(l)} - Y_0^{(l)}) d\xi, \quad \eta^{(l-1)}(t) = (1 + m) \int_0^t (t - \xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m} [\sigma_u^{(l-1)}(\xi)]}.$$

При построении решений системы дифференциальных уравнений (32) – (33) с граничными и начальными условиями применяется разностная схема второго порядка. В результате сформирована задача Коши для конечно-разностных уравнений в целях определения колебаний подземного трубопровода при пространственном нагружении с учетом повреждаемости и взаимодействия с грунтом [25].

**Заключение.** На основе вариационного принципа выведены уравнения движения подземных трубопроводов при повторно - переменном пространственном нагружении в цилиндрических координатах с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом. Показан способ определения параметров упругопластического и вязкоупругого взаимодействия трубопровода с грунтом. Приведены расчетная схема и анализ НДС подземных трубопроводов с учетом повреждаемости при пространственном нагружении.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аleshин В.В. Численный анализ прочности подземных трубопроводов. М.: Едиториал УРСС, 2003. – 320 с.
- [2] Зорин Н.Е. Экспериментальная оценка работоспособности труб магистральных газопроводов при циклическом нагружении: Автореф. дис ... канд. техн. наук. М., 2010. – 23 с.
- [3] Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. М.: Недра, 1982. – 341 с.
- [4] Гусенков А.П., Фокин М.Ф. Исследование малоциклового прочности труб большого диаметра магистральных газо- и нефтепроводов. М.: Машиноведение. 1975. №3. С.61 – 70.
- [5] Мазур И.И., Иванцов О.М. Безопасность трубопроводных систем. М.: ИЦ Елима, 2004. – 104 с.

- [6] Буриев Т. Обеспечение безопасности конструкции сложных объектов в экстремальных ситуациях. Ташкент: «Fan va technology», 2009. – 148 с.
- [7] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- [8] Селезнев В.Е., Алевшин В.В., Прялов С.Н. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов. Изд. 2–е, перераб. и доп. М.: МАКС Пресс. – 2009. – 436 с.
- [9] Андреева Е.В. Разработка методики оценки несущей способности подземных трубопроводов в сейсмически опасных зонах: Дис ... канд. техн. наук. М., 2009. – 138 с.
- [10] Бекмирзаев Д.А. Численный метод решения сейсродинамики подземных трубопроводов. Ташкент: «Фан ва технология», 2018. – 148 с.
- [11] Зарипов Р.М. Научные основы расчета напряженно-деформированного состояния трубопроводов, проложенных в сложных инженерно-геологических условиях: Дис ... докт. техн. наук. Уфа, 2005. – 344 с.
- [12] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 2001. – 316 с.
- [13] Махутов Н.А., Филатов В.М., Раманов А.Н. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении. М.: Наука, 1983. – 271 с.
- [14] Ильёшин А.А. Труды. Пластичность. М.: Логос, 2004. – 388 с.
- [15] Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: URSS. 2019. – 344 с. (переизд).
- [16] Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкции на упругом основании. М.: Физматлит. 2006. – 379 с.
- [17] Гусенков А.П., Москвитин Г.В., Хорошилов В.Н. Малоцикловая прочность оболочечных конструкций. М.: Наука. 1989. – 254 с.
- [18] Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. – 152 с.
- [19] Рашидов Т.Р., Юлдашев Т., Маткаримов А.Х. Модели сейсродинамики подземных сооружений при пространственном нагружении // Вестник ТашиИИТ. Ташкент, 2006. № 1. С. 66–74.
- [20] Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсродинамики сооружений. Книга 2. Колебания и устойчивость подземных сооружений сложной структуры при сейсмических воздействиях. Ташкент: Навруз, 2021. – 172 с.
- [21] Нишионов Н.А. Сейсмические воздействия на подземный полимерный трубопровод в виде реальных записей землетрясений // Узб. журнал «Проблемы механики». 2019. №4. С. 15–17.
- [22] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.
- [23] Кабулов В.К. Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. – 394 с.
- [24] Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И., Рузиева Н.Б. Уравнение движения подземных магистральных трубопроводов при пространственно-переменном упругопластическом нагружении // Матер. Респуб. науч.-практ. конференции «Современная архитектура», прочность зданий и сооружений. Проблемы надежности и сейсмической безопасности». НамИСИ, 2021. С. 135–137.
- [25] Рузиева Н.Б., Абдусаттаров А. Нелинейное деформирование подземных трубопроводов при циклическом нагружении // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI Междунар. науч. - практ. конференции. Гомель: БелГУТ, 2021. Ч.2. С. 113–114.
- [26] Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2022. Т.28. №3. С. 339–358.

Дата поступления  
18.10.2022 г.

**Абдусаттаров А., Рузиева Н.В. Циклик юкланиши таъсиридаги ер ости қувурларининг ночизиқли деформацияси ва шикастланиши**

**Аннотация:** Мақолада умумлашган Мазинг тамойилидан фойдаланилган ҳолда циклик юкланишлар таъсиридаги қувур тизимларининг ночизиқли деформацияси ва шикастланиши моделлари келтирилган. Кичик эластик-пластик деформациялар назарияси ва Гамиль-милтон-Остроградскийнинг вариацион тамойили асосида циклик юкланишлар таъсиридаги қувур ҳаракатининг дифференциал тенгламалар системаси олинган. Шикастланиши ва грунт билан ўзаро таъсирини ҳисобга олган ҳолда ер ости қувурларининг ҳисоб схемаси ҳамда юклашлари сонига боғлиқ ҳолда кучланганлик-деформацияланганлик ҳолатининг ўзгариши келтирилган. Ҳисобий миқдорларга шикастланиши жараёнининг таъсири график кўринишида кўрсатилган.

**Калим сўзлар:** қувурлар тизими; вариацион тамойил; циклик юклама; шикастланганлик; ҳаракат тенгламаси.

**Abdusattarov A., Ruzieva N.B. Nonlinear deformation and consideration of underground pipeline damage under cyclic loading**

**Abstract:** The article presents models of nonlinear deformation and damage of pipeline systems under cyclic loading using the generalized Masing principle. Based on the theory of small elastic-plastic deformations and the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, a system of differential equations of motion (equilibrium) under cyclic loads is obtained. The design scheme of underground pipelines is given, taking into account damage and interaction with soil, and the kinetics of stress-strain depending on the number of loading cycles is presented. The consideration of the damaging effect on the calculated values is graphically shown.

**Keywords:** pipeline systems; variational principle; cyclic loading; damageability; equations of motion.

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ БИМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ТОЛСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Усаров М.К.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан*  
E-mail: utaxamatali@mail.ru

**Аннотация:** Статья посвящена совершенствованию бимоментной теории и метода расчета толстых пластин в рамках трехмерной теории упругости. Представлены основные соотношения, уравнения движения пластины и граничные условия, построенные относительно сил, моментов и бимоментов, возникающих из-за нелинейности закона распределения перемещений и напряжений по её толщине. Рассмотрен пример расчета изгиба и колебаний изотропных и ортотропных пластин. Полученные численные результаты показали эффективность предложенной бимоментной теории при оценке напряженно-деформированного состояния толстых пластин.

**Ключевые слова:** толстая ортотропная пластина; закон Гука; трехмерная теория; уравнения движения; теория упругости; бимоментная теория; бесконечный ряд; внешняя нагрузка.

**Введение.** Расчет пластин и оболочек занимает особое место в области исследования элементов конструкции. С основными положениями общей методики построения уточненной теории пластин и оболочек можно ознакомиться в монографии С.А. Амбарцумяна [1]. При построении общей теории пластин в рамках трехмерной задачи теории упругости исследователи используют различные методы [2–4], например, метод гипотез, метод разложения перемещений в ряд или метод асимптотического решения и т.д.

В пространственном случае деформирования пластины по её толщине имеют место нелинейные законы распределения перемещений. Следовательно, необходимо учитывать все компоненты тензора напряжения и деформации:  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  ( $i, j=1, 3$ ). Отметим, что в этом случае в отличие от традиционного случая постановки задачи для описания поля пространственного деформирования пластины растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов недостаточно, дополнительно необходимо учитывать и бимоменты. В данной статье кратко приведены определяющие соотношения, уравнения движения, граничные условия бимоментной теории пластин, разработанной в [5–9].

Приведенный обзор известных работ показывает, что теории и методы расчета развиты в недостаточно полной мере. Вместе с тем, недостаточно полно проанализированы процессы, происходящие в толстых пластинах, изготовленных из материалов, обладающих анизотропными свойствами. Наряду с этим в недостаточной степени разработаны и развиты аналитические и численные методы решений статических и динамических задач с учетом нелинейных законов распределения перемещений и напряжений, которые являются причиной появления не только сил и моментов, но и бимоментов в поперечных сечениях пластины. В теории пластин и оболочек до настоящего времени не построены точные выражения для определения сил и моментов и в недостаточной мере приложены ее новые достижения в расчетах на сейсмостойкость зданий и сооружений.

Данная статья посвящена разработке теории и методов расчета толстых элементов конструкции на основе бимоментной теории пластин. При построении теории учитываются все силовые факторы пластины, включая бимоменты, а также все компоненты тензоров напряжения и деформации:  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  ( $i, j=1, 3$ ). Компоненты вектора перемещения представляются в виде функции трех пространственных координат и времени  $u_1(x_1, x_2, z, t), u_2(x_1, x_2, z, t), u_3(x_1, x_2, z, t)$ .

**Постановка задачи.** Рассматривается ортотропная толстая пластина постоянной толщины  $H=2h$  и с размерами  $a, b$  в плане. Вводятся обозначения:  $E_1, E_2, E_3$  – модули упругости;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига;  $\nu_2, \nu_3, \nu_{23}$  – коэффициенты Пуассона и  $\rho$  – плотность материала пластины.

Для описания движения пластины вводится декартова система координат с переменными  $x_1, x_2$  и  $z$ . Ось  $Oz$  направлена вниз. Начало координат расположено в срединной поверхности пластины. По двум лицевым поверхностям пластины  $z=-h$  и  $z=+h$  приложены распределенные поверхностные, нормальные и касательные нагрузки. Нормальные



нагрузки  $q_3^{(+)}$ ,  $q_3^{(-)}$  приложены в направлении оси  $oz$ . Касательные нагрузки  $q_k^{(+)}$ ,  $q_k^{(-)}$ , ( $k = 1, 2$ ) – в направлении  $ox_1$ ,  $ox_2$ .

Компоненты вектора перемещения определяются в виде функций трех пространственных координат и времени  $u_1(x_1, x_2, z, t)$ ,  $u_2(x_1, x_2, z, t)$ ,  $u_3(x_1, x_2, z, t)$ .

Компоненты тензора деформации определяются следующими соотношениями Коши. Пластина рассматривается как трехмерное тело, материал которой подчиняется обобщенному закону Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + E_{23}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = E_{31}\varepsilon_{11} + E_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2G_{12}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G_{13}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G_{23}\varepsilon_{23},\end{aligned}\quad (1)$$

где  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ , ...,  $E_{33}$  – упругие константы, определяемые через коэффициенты Пуассона и модули упругости [5, 9].

Пластина рассматривается как трехмерное тело и в качестве уравнения движения пластины примем трехмерные уравнения теории упругости [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_k, \quad (k = 1, 3). \quad (2)$$

Граничные условия на нижней и верхней поверхностях  $z = -h$  и  $z = +h$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{31} &= q_1^{(-)}, \quad \sigma_{32} = q_2^{(-)}, \quad \sigma_{33} = q_3^{(-)}, \\ \sigma_{31} &= q_1^{(+)}, \quad \sigma_{32} = q_2^{(+)}, \quad \sigma_{33} = q_3^{(+)}. \end{aligned}\quad (3)$$

Перемещения точек на лицевых поверхностях  $z = -h$  и  $z = +h$  пластины обозначим через  $u_i^{(-)}$ ,  $u_i^{(+)}$ , ( $i = 1, 3$ ), а напряжения на лицевых поверхностях  $z = -h$  и  $z = +h$  – через  $\sigma_{11}^{(-)}$ ,  $\sigma_{12}^{(-)}$ ,  $\sigma_{22}^{(-)}$  и  $\sigma_{11}^{(+)}$ ,  $\sigma_{12}^{(+)}$ ,  $\sigma_{22}^{(+)}$ .

Отметим, что бимоментная теория пластин описывается двумя несвязанными системами дифференциальных уравнений движения, которые описывают симметричную и асимметричную задачи, каждая из которых формулируется на основе девяти двумерных уравнений с соответствующими краевыми условиями. Определяющие соотношения и уравнения равновесия бимоментной теории пластин разработаны с использованием закона Гука (1) и уравнения теории упругости (2) и приведены в работах [5, 9]. В данной статье приводятся уравнения движения, граничные условия и основные соотношения бимоментной теории толстых пластин и показаны ее преимущества среди существующих теорий толстых пластин.

Симметричная задача бимоментной теории пластин состоит из двух уравнений относительно продольных и тангенциальных усилий и четырех дополнительно построенных уравнений бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций:

$$\begin{aligned}\bar{u}_k &= \frac{u_k^{(+)} + u_k^{(-)}}{2}, \quad \bar{\psi}_k = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_k dz, \quad \bar{\beta}_k = \frac{1}{2h^3} \int_{-h}^h u_k z^2 dz, \quad (k = 1, 2), \\ \bar{W} &= \frac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, \quad \bar{r} = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h u_3 z dz, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2h^4} \int_{-h}^h u_3 z^3 dz.\end{aligned}\quad (4)$$

Вводятся грузовые члены уравнения движения для первой задачи  $\bar{q}_k$ , ( $k = 1, 2$ ),  $\bar{q}_3$ , которые определяются по формулам

$$\bar{q}_k = \frac{q_k^{(+)} - q_k^{(-)}}{2}, \quad (k = 1, 2), \quad \bar{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} + q_3^{(-)}}{2}. \quad (5)$$

Усилия  $N_{11}$ ,  $N_{12}$ ,  $N_{22}$  от напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  определены выражениями:

$$N_{11} = E_{11}H \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12}H \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{13}\bar{W}, \quad (6)$$

$$N_{22} = E_{12}H \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22}H \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{23}\bar{W}, \quad N_{12} = N_{21} = G_{12} \left( H \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x_1} + H \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x_2} \right).$$

Бимоменты  $T_{11}, T_{12}, T_{22}$  от напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  определены в виде

$$T_{11} = H \left( E_{11} \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \bar{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{13} \frac{2\bar{W} - 4\bar{r}}{H} \right), \quad (7)$$

$$T_{12} = T_{21} = HG_{12} \left( \frac{\partial \bar{\beta}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial x_2} \right), \quad T_{22} = H \left( E_{12} \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \bar{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{23} \frac{2\bar{W} - 4\bar{r}}{H} \right).$$

Интенсивности поперечных бимоментов  $\bar{p}_{13}, \bar{p}_{23}$  и  $\bar{\tau}_{13}, \bar{\tau}_{23}$  от касательных напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  построены в виде следующих выражений:

$$\bar{p}_{k3} = G_{k3} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_k} + \frac{2(\bar{u}_k - \bar{\psi}_k)}{H} \right), \quad \bar{\tau}_{k3} = G_{k3} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial x_k} + \frac{2(\bar{u}_k - 3\bar{\beta}_k)}{H} \right), \quad (k=1,2). \quad (8)$$

Интенсивности бимоментов  $\bar{p}_{33}$  и  $\bar{\tau}_{33}$  от нормального напряжения  $\sigma_{33}$  получены в виде

$$\bar{p}_{33} = E_{31} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial x_2} + E_{33} \frac{2\bar{W}}{H}, \quad \bar{\tau}_{33} = E_{31} \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \bar{\beta}_2}{\partial x_2} + E_{33} \frac{2\bar{W} - 4\bar{r}}{H}. \quad (9)$$

Уравнения движения пластины относительно продольных и тангенциальных усилий построены в виде

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_1 = \rho H \ddot{\bar{\psi}}_1, \quad \frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_2 = \rho H \ddot{\bar{\psi}}_2. \quad (10)$$

Отметим, что в системе двух уравнений (10) содержатся три неизвестные функции  $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{W}$ .

Относительно продольных и тангенциальных бимоментов также построены два уравнения движения в виде

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} - 4\bar{p}_{13} + 2\bar{q}_1 = \rho H \ddot{\bar{\beta}}_1, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} - 4\bar{p}_{23} + 2\bar{q}_2 = \rho H \ddot{\bar{\beta}}_2. \quad (11)$$

В отличие от традиционных теорий пластин здесь построены ещё два уравнения движения пластин относительно интенсивности поперечных бимоментов в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{p}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{p}_{23}}{\partial x_2} - \frac{2\bar{p}_{33}}{H} + \frac{2\bar{q}_3}{H} = \rho \ddot{\bar{r}}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial x_2} - \frac{6\bar{\tau}_{33}}{H} + \frac{2\bar{q}_3}{H} = \rho \ddot{\bar{\gamma}}. \quad (13)$$

Здесь необходимо отметить, что все формулы силовых факторов, т.е. (6) – (9) и уравнения движения пластины первой задачи (10) – (13) построены точно. Они составляют совместную систему дифференциальных уравнений, состоящую из шести уравнений относительно девяти неизвестных функций:  $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{r}, \bar{\gamma}, \bar{W}$ . В построенных уравнениях (6) – (9) и (10) – (13) число уравнений меньше, чем число неизвестных, т.е. не хватает еще трех уравнений.

Теперь рассмотрим асимметричную задачу бимоментной теории. Асимметричная задача бимоментной теории пластин состоит из уравнений относительно изгибающих и крутящих моментов, перерезывающих сил и бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций, т.е.:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k &= \frac{u_k^{(+)} - u_k^{(-)}}{2}, \quad \tilde{\psi}_k = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^h u_k z dz, \quad \tilde{\beta}_k = \frac{1}{2h^4} \int_{-h}^h u_k z^3 dz, \quad (k=1,2), \\ \tilde{W} &= \frac{u_3^{(+)} + u_3^{(-)}}{2}, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_3 dz, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{2h^3} \int_{-h}^h u_3 z^2 dz.\end{aligned}\quad (14)$$

Грузовые члены уравнения второй задачи  $\tilde{q}_k, (k=1,2), \tilde{q}_3$  определяются в виде

$$\tilde{q}_k = \frac{q_k^+ + q_k^-}{2}, \quad (k=1,2), \quad \tilde{q}_3 = \frac{q_3^+ - q_3^-}{2}.\quad (15)$$

Изгибающие и крутящие моменты  $M_{11}, M_{22}, M_{12}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}M_{11} &= \frac{H^2}{2} \left( E_{11} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H} \right), \\ M_{22} &= \frac{H^2}{2} \left( E_{12} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{23} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H} \right), \quad M_{12} = M_{21} = G_{12} \frac{H^2}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial x_1} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

Изгибающие и крутящие бимоменты  $P_{11}, P_{22}, P_{12}$  запишутся в виде

$$\begin{aligned}P_{11} &= \frac{H^2}{2} \left( E_{11} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right), \\ P_{12} = P_{21} &= \frac{H^2}{2} G_{12} \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_1} \right), \quad P_{22} = \frac{H^2}{2} \left( E_{12} \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22} \frac{\partial \tilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{23} \frac{2(3\tilde{\gamma} - \tilde{W})}{H} \right).\end{aligned}\quad (17)$$

Выражения для определения перерезывающих сил имеют вид

$$Q_{13} = G_{13} \left( 2\tilde{u}_1 + H \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_1} \right), \quad Q_{23} = G_{23} \left( 2\tilde{u}_2 + H \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_2} \right).\quad (18)$$

Интенсивности поперечных бимоментов  $\tilde{p}_{13}, \tilde{p}_{23}$  построены с использованием касательных напряжений  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  в виде

$$\tilde{p}_{k3} = G_{k3} \left( \frac{2\tilde{u}_k - 4\tilde{\psi}_k}{H} + \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial x_k} \right), \quad k=1,2.\quad (19)$$

Интенсивность нормального бимомента  $\tilde{p}_{33}$  построена с использованием нормального напряжения  $\sigma_{33}$  в виде

$$\tilde{p}_{33} = E_{31} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{31} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial x_1} - E_{33} \frac{2(\tilde{r} - \tilde{W})}{H}.\quad (20)$$

Уравнения движения асимметричного деформирования пластины также описываются с помощью системы из шести уравнений.

Первые три уравнения движения толстой пластины получены относительно изгибающих и крутящих моментов и уравнения в перерезывающих силах:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_{13} + H\tilde{q}_1 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\psi}_1, \quad \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_{23} + H\tilde{q}_2 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\psi}_2,\quad (21)$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + 2\tilde{q}_3 = \rho H \ddot{r}.\quad (22)$$

Далее три уравнения движения пластины запишутся относительно бимоментов. Из них два относительно изгибающих и крутящих бимоментов имеют вид

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} - 3H\tilde{p}_{13} + H\tilde{q}_1 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\beta}_1, \quad \frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} - 3H\tilde{p}_{23} + H\tilde{q}_2 = \frac{H^2}{2} \rho \ddot{\beta}_2.\quad (23)$$

Шестое уравнение движения пластины относительно интенсивности поперечных бимоментов запишется в виде

$$H \frac{\partial \tilde{p}_{13}}{\partial x_1} + H \frac{\partial \tilde{p}_{23}}{\partial x_2} - 4\tilde{p}_{33} + 2\tilde{q}_3 = H\rho\ddot{\gamma}. \quad (24)$$

Из приведенных уравнений видно, что в первой задаче бимоментной теории пластины все формулы сил, моментов и бимоментов (16) – (20) и дифференциальные уравнения движения (21)–(24) построены точно и составляют совместную систему из шести уравнений относительно девяти неизвестных функций  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{r}, \tilde{\gamma}, \tilde{W}$ .

При этом не хватает еще трех уравнений. Как в симметричной, так и в асимметричной задачах не хватает по три уравнения. Для построения этих шести недостающих уравнений использованы трехмерные уравнения теории упругости и метод разложения компоненты перемещения в ряд Маклорена.

Уравнения движения теории упругости на лицевой поверхности пластин  $z=+h$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(+)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(+)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right)_{(+)} &= \rho \frac{\partial^2 u_1^{(+)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{21}^{(+)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(+)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right)_{(+)} &= \rho \frac{\partial^2 u_2^{(+)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}^{(+)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(+)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{(+)} &= \rho \frac{\partial^2 u_3^{(+)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения теории упругости на лицевой поверхности  $z=-h$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(-)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(-)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right)_{(-)} &= \rho \frac{\partial^2 u_1^{(-)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}^{(-)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(-)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{(-)} &= \rho \frac{\partial^2 u_3^{(-)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}^{(-)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(-)}}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{(-)} &= \rho \frac{\partial^2 u_3^{(-)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сложив соответственно первые и вторые уравнения систем (25), (26), получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\bar{\sigma}_{13}^*}{H} = \rho \ddot{u}_1, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\bar{\sigma}_{23}^*}{H} = \rho \ddot{u}_2, \quad (27)$$

где бимоменты  $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{22}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \left( E_{11} - \frac{E_{13}}{E_{33}} E_{31} \right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \left( E_{12} - \frac{E_{13}}{E_{33}} E_{32} \right) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}} \bar{q}_3, \\ \bar{\sigma}_{22} &= \left( E_{21} - \frac{E_{23}}{E_{33}} E_{31} \right) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \left( E_{22} - \frac{E_{23}}{E_{33}} E_{32} \right) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}} \bar{q}_3, \\ \bar{\sigma}_{12} &= G_{12} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Вычитая третье уравнение системы (26) из уравнения (27), получим уравнение

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial x_2} + \frac{\bar{\sigma}_{33}^*}{H} = \rho \ddot{W}. \quad (29)$$

В уравнениях (27) и (29) интенсивности бимоментов  $\bar{\sigma}_{13}^*$ ,  $\bar{\sigma}_{23}^*$  и  $\bar{\sigma}_{33}^*$  определяются через полуразности и полусуммы производных по координате  $z$  от касательных и нормального напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ , и  $\sigma_{33}$ , имеющие следующий вид:

$$\frac{\bar{\sigma}_{3k}^*}{H} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} \right)_{z=+h} + \left( \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right) = G_{3k} \left( \frac{\bar{R}_k}{H^2} + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x_k} \right) \quad (k=1,3), \quad (30)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{33}^*}{H} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{z=+h} - \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right) = E_{33} \frac{\bar{R}}{H^2} + E_{31} \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial x_2}. \quad (31)$$

Вычитая два уравнения (26) из уравнений системы (25), получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{13}^*}{H} = \rho \ddot{u}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{23}^*}{H} = \rho \ddot{u}_2, \quad (32)$$

здесь бимоменты  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \left( E_{11} - \frac{E_{13} E_{31}}{E_{33}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \left( E_{12} - \frac{E_{13} E_{32}}{E_{33}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}} \tilde{q}_3, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \left( E_{21} - \frac{E_{23} E_{31}}{E_{33}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \left( E_{22} - \frac{E_{23} E_{32}}{E_{33}} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}} \tilde{q}_3, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= G_{12} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Сложив почленно уравнения (26) и (25), получим:

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_2} + \frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = \rho \ddot{W}. \quad (34)$$

В уравнениях (32) и (34) интенсивности бимоментов  $\tilde{\sigma}_{13}^*$ ,  $\tilde{\sigma}_{23}^*$  и  $\tilde{\sigma}_{33}^*$  определяются через полуразности и полусуммы производных по координате  $z$  от касательных и нормального напряжений  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ , и  $\sigma_{33}$ , имеющие следующий вид:

$$\frac{\tilde{\sigma}_{3k}^*}{H} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} \right)_{z=+h} - \left( \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right) = G_{3k} \left( \frac{\tilde{R}_k}{H^2} + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x_k} \right) \quad (k=1,3), \quad (35)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{z=+h} + \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right)_{z=-h} \right) = E_{33} \frac{\tilde{R}}{H^2} + E_{31} \frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial x_1} + E_{32} \frac{\partial \tilde{\alpha}_2}{\partial x_2}. \quad (36)$$

Чтобы определить неизвестные функции  $\bar{R}_k$ ,  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{\alpha}$  в выражениях (30), (31) и  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{R}_2$ ,  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{\alpha}$  в (35), (36), функции перемещения разлагаются в ряд Маклорена:

$$u_k = B_0^{(k)} + B_1^{(k)} \frac{z}{h} + B_2^{(k)} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + B_3^{(k)} \left( \frac{z}{h} \right)^3 + \dots + B_i^{(k)} \left( \frac{z}{h} \right)^i + \dots, \quad (k=1,2), \quad (37)$$

$$u_3 = A_0 + A_1 \frac{z}{h} + A_2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + A_3 \left( \frac{z}{h} \right)^3 + \dots + A_i \left( \frac{z}{h} \right)^i + \dots \quad (38)$$

Здесь  $B_i^{(k)}$ ,  $A_i$  – неизвестные функции двух пространственных координат  $B_i^{(k)} = B_i^{(k)}(x_1, x_2, t)$ ,  $A_i = A_i(x_1, x_2, t)$ ,  $(i=1,2,3, \dots)$ .

Используя соотношения (4), ряды Маклорена (25), (26), поверхностные условия (3) представим в виде двух независимых систем с тремя линейными алгебраическими уравнениями относительно коэффициентов разложения (25), (26)  $B_i^{(k)}$ ,  $A_i$ ,  $(i=0, 1, 2, \dots)$ . Из этих систем алгебраических уравнений определяем коэффициенты рядов (25) и (26) через обобщенные функции (4) и (14) симметричной и асимметричной задач бимоментной теории.

Подставляя найденные выражения коэффициентов рядов  $B_{2i-2}^{(k)}$ ,  $A_{2i-1}$ , ( $i=1,2,3,\dots$ ) в (30) и (31), получим выражения для бимоментов  $\bar{\sigma}_{13}^*$ ,  $\bar{\sigma}_{23}^*$ ,  $\bar{\sigma}_{33}^*$  в виде

$$\frac{\bar{\sigma}_{31}^*}{H} = \frac{\bar{q}_1 - \bar{\sigma}_{13}}{\Delta H}, \quad \frac{\bar{\sigma}_{32}^*}{H} = \frac{\bar{q}_2 - \bar{\sigma}_{23}}{\Delta H}, \quad \frac{\bar{\sigma}_{33}^*}{H} = \frac{\bar{q}_3 - \bar{\sigma}_{33}}{\Delta H}, \quad (39)$$

где  $\Delta H = \frac{H}{36}$ ,

$$\bar{\sigma}_{13} = G_{13} \left[ \frac{5}{6} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_1} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{35(9\bar{\beta}_1 - 2\bar{\nu}_1 - \bar{u}_1)}{6H} \right] - \frac{1}{6} \bar{q}_1 - \frac{G_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial x_1}, \quad (40)$$

$$\bar{\sigma}_{23} = G_{23} \left[ \frac{5}{6} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x_2} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} - \frac{35(9\bar{\beta}_2 - 2\bar{\nu}_2 - \bar{u}_2)}{6H} \right] - \frac{1}{6} \bar{q}_2 - \frac{G_{32}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial x_2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{33} = & \frac{7E_{31}}{6} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{7E_{32}}{6} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{H}{36} \left( E_{31} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_1^2} - E_{32} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x_2^2} \right) - E_{33} \frac{35(33\bar{\gamma} - 9\bar{W} - 4\bar{r})}{6H} + \\ & + \frac{1}{6} \bar{q}_3 - \frac{H}{36} \left( E_{31} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\bar{q}_1}{G_{13}} \right) + E_{32} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\bar{q}_2}{G_{23}} \right) \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогично, подставив выражения коэффициентов рядов  $B_{2i-2}^{(k)}$ ,  $A_{2i-1}$ , ( $i=1,2,3,\dots$ ) в (35), (36), получим выражения

$$\frac{\tilde{\sigma}_{31}^*}{H} = \frac{\tilde{q}_1 - \tilde{\sigma}_{13}}{\Delta H}, \quad \frac{\tilde{\sigma}_{32}^*}{H} = \frac{\tilde{q}_2 - \tilde{\sigma}_{23}}{\Delta H}, \quad \frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = \frac{\tilde{q}_3 - \tilde{\sigma}_{33}}{\Delta H}, \quad (42)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{13} = G_{13} \left[ \frac{7}{6} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{35(33\tilde{\beta}_1 - 9\tilde{\nu}_1 - 4\tilde{u}_1)}{6H} \right] - \frac{1}{6} \tilde{q}_1 - \frac{G_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_1}, \quad (43)$$

$$\tilde{\sigma}_{23} = G_{23} \left[ \frac{7}{6} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2} + \frac{E_{31}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{H}{36} \frac{E_{32}}{E_{33}} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x_2^2} - \frac{35(33\tilde{\beta}_2 - 9\tilde{\nu}_2 - 4\tilde{u}_2)}{6H} \right] - \frac{1}{6} \tilde{q}_2 - \frac{G_{32}}{E_{33}} \frac{H}{36} \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33} = & \frac{5E_{31}}{6} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{5E_{32}}{6} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{H}{36} \left( E_{31} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_1^2} - E_{32} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_2^2} \right) - E_{33} \frac{35(9\tilde{\gamma} - 2\tilde{W} - \tilde{r})}{6H} + \\ & + \frac{1}{6} \tilde{q}_3 - \frac{H}{36} \left( E_{31} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\tilde{q}_1}{G_{13}} \right) + E_{32} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\tilde{q}_2}{G_{23}} \right) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь необходимо отметить, что приближенные выражения (40), (41), (43), (44) имеют высокую точность и построены с шестым порядком точности относительно малого параметра пластины  $\delta = H/10a$ . Здесь  $a$  – малый размер в плане пластины.

Отметим, что были построены выражения бимоментов для симметричной и асимметричной задач (39) и (42), которые являются членами системы уравнений (27), (29) и (32), (34), соответственно для определения шести неизвестных функций  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$ ,  $\bar{W}$  и  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$ ,  $\tilde{W}$ .

Таким образом, были построены две независимые системы из трех уравнений движения толстой пластины, в каждой из которых содержится по три неизвестных функций перемещений лицевых поверхностей пластины  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$ ,  $\bar{W}$  и  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$ ,  $\tilde{W}$ .

Приведем формулы для определения перемещений и напряжений на лицевых поверхностях пластины  $z=-h$  и  $z=+h$  и:

$$\begin{aligned} u_i^{(-)} = \bar{u}_i - \tilde{u}_i, \quad u_i^{(+)} = \bar{u}_i + \tilde{u}_i, \quad (i=1,2), \quad u_3^{(-)} = \tilde{W} - \bar{W}, \quad u_3^{(+)} = \tilde{W} + \bar{W}, \\ \sigma_{ij}^{(-)} = \bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(+)} = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \quad (i=1,2; j=1,2). \end{aligned} \quad (45)$$

**Граничные условия бимоментной теории пластин.** Если на границе пластины перемещения равны нулю, то граничные условия для уравнений на краю  $x_1=const$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0, \quad \tilde{\beta}_1 = 0, \quad \tilde{\beta}_2 = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{W} = 0, \\ \bar{\psi}_1 = 0, \quad \bar{\psi}_2 = 0, \quad \bar{\beta}_1 = 0, \quad \bar{\beta}_2 = 0, \quad \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{W} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Если край пластины оперт, то на краю  $x_1=const$  имеем граничные условия, которые имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11} = 0, \quad M_{12} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{12} = 0, \quad \tilde{W} = 0, \\ N_{11} = 0, \quad N_{12} = 0, \quad T_{11} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\sigma}_{11} = 0, \quad \bar{\sigma}_{12} = 0, \quad \bar{W} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Если край пластины оперт и имеется диафрагма, которая стесняет перемещение по касательному направлению к контуру, то на краю  $x_1=const$  условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_{11} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0, \quad \tilde{\beta}_2 = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11} = 0, \quad \tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{W} = 0, \\ N_{11} = 0, \quad N_{12} = 0, \quad T_{11} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\sigma}_{11} = 0, \quad \bar{\sigma}_{12} = 0, \quad \bar{W} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Для свободного края пластины  $x_1=const$  граничные условия будут представлены в виде

$$\begin{aligned} M_{11} = 0, \quad M_{12} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad P_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad \tilde{p}_{13} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{12} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{13}^* = 0, \\ N_{11} = 0, \quad N_{12} = 0, \quad T_{11} = 0, \quad T_{12} = 0, \quad \bar{\sigma}_{11} = 0, \quad \bar{\sigma}_{12} = 0, \quad \bar{p}_{13} = 0, \quad \bar{r}_{13} = 0, \quad \bar{\sigma}_{13}^* = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

В предлагаемой бимоментной теории уравнения равновесия построены независимо от метода разложения. Только поверхностные условия при  $z=-h$  и  $z=+h$  аппроксимируются на основе метода разложения с высокой точностью при удержании восьми членов ряда (37) и (38).

**Пример.** В качестве примера приведем решение задачи об изгибе толстой пластины под действием синусоидальной нагрузки:

$$q_1^{(-)} = 0, \quad q_2^{(-)} = 0, \quad q_3^{(-)} = -q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \quad q_1^{(+)} = 0, \quad q_2^{(+)} = 0, \quad q_3^{(+)} = 0,$$

где  $q_0$  – параметр внешней нагрузки.

Предположим, что на боковых краях пластины имеются жесткие усиливающие элементы, препятствующие поперечному обжатию пластины. За счет наличия усиливающего элемента граничные условия на краях пластины  $x_1=const$  и  $x_2=const$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} N_{11} = 0, \quad T_{11} = 0, \quad \bar{\psi}_2 = 0, \quad \bar{\beta}_2 = 0, \quad \bar{\sigma}_{11} = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{W} = 0, \\ N_{22} = 0, \quad T_{22} = 0, \quad \bar{\psi}_1 = 0, \quad \bar{\beta}_1 = 0, \quad \bar{\sigma}_{22} = 0, \quad \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{W} = 0, \\ M_{11} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0, \quad \tilde{\beta}_2 = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11} = 0, \quad \tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{W} = 0, \\ M_{22} = 0, \quad P_{22} = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\beta}_1 = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{22} = 0, \quad \tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{W} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

**Аналитическое решение симметричной задачи.** Решение уравнений равновесия пластины (10) – (13), (28), (29), удовлетворяющее граничным условиям (50) для симметричной задачи, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 = \bar{C}_1 f_1(x_1, x_2), \quad \bar{\psi}_2 = \bar{C}_2 f_2(x_1, x_2), \quad \bar{r} = \bar{C}_3 f_3(x_1, x_2), \\ \bar{\beta}_1 = \bar{C}_4 f_1(x_1, x_2), \quad \bar{\beta}_2 = \bar{C}_5 f_2(x_1, x_2), \quad \bar{u}_1 = \bar{C}_6 f_1(x_1, x_2), \\ \bar{u}_2 = \bar{C}_7 f_2(x_1, x_2), \quad \bar{W} = \bar{C}_8 f_3(x_1, x_2), \quad \bar{\gamma} = \bar{C}_9 f_3(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (51)$$

где  $f_1(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right)$ ;  $f_2(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{b}\right)$ ;  $f_3(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right)$ .

Подставляя решение (51) в уравнения равновесия (10) – (13), (28), (29), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти неизвестных постоянных  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_9$ .

**Аналитическое решение асимметричной задачи.** Решение системы уравнений (21) – (24), (30), (31), удовлетворяющее граничным условиям (48), запишется в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &= \tilde{C}_1 f_1(x_1, x_2), \quad \tilde{\psi}_2 = \tilde{C}_2 f_2(x_1, x_2), \quad \tilde{r} = \tilde{C}_3 f_3(x_1, x_2), \\ \tilde{\beta}_1 &= \tilde{C}_4 f_1(x_1, x_2), \quad \tilde{\beta}_2 = \tilde{C}_5 f_2(x_1, x_2), \quad \tilde{u}_1 = \tilde{C}_6 f_1(x_1, x_2), \\ \tilde{u}_2 &= \tilde{C}_7 f_2(x_1, x_2), \quad \tilde{W} = \tilde{C}_8 f_3(x_1, x_2), \quad \tilde{\gamma} = \tilde{C}_9 f_3(x_1, x_2).\end{aligned}\quad (52)$$

Подставляя решение (52) в уравнения равновесия (21) – (24), (30), (31), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти неизвестных постоянных  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_9$ .

**Обсуждение результатов расчета.** Расчеты проведены для квадратной изотропной пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu_{21}=\nu_{23}=\nu_{31}=0.3$  продольными модулями упругости  $E_1=E_2=E_3$  и ортотропной пластины СВМ 15:1 со следующими характеристиками:  $E_1=4.6 \cdot E_0$ ,  $E_2=1.6 \cdot E_0$ ,  $E_3=1.12 \cdot E_0$ , модули сдвигов:  $G_{12}=0.56 \cdot E_0$ ,  $G_{13}=0.33 \cdot E_0$ ,  $G_{23}=0.43 \cdot E_0$ , где  $E_0=10^5$  кг/см<sup>2</sup> и коэффициенты Пуассона:  $\nu_{21}=0.27$ ,  $\nu_{31}=0.3$ ,  $\nu_{23}=0.07$ .

С помощью полученных решений систем алгебраических уравнений определены численные значения перемещений и напряжений для квадратной изотропной и ортотропной пластин различных относительных толщин.

Введем безразмерные перемещения на лицевых поверхностях пластины  $z=-h$  и  $z=+h$  по формулам

$$u_1^{(-)} = \frac{E_0 u_1^{(-)}}{H q_0}, \quad u_1^{(+)} = \frac{E_0 u_1^{(+)}}{H q_0}, \quad u_2^{(-)} = \frac{E_0 u_2^{(-)}}{H q_0}, \quad u_2^{(+)} = \frac{E_0 u_2^{(+)}}{H q_0}, \quad u_3^{(-)} = \frac{E_0 u_3^{(-)}}{H q_0}, \quad u_3^{(+)} = \frac{E_0 u_3^{(+)}}{H q_0}.$$

Безразмерные напряжения и интенсивности бимоментов введем по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{q_0}, \quad \sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{q_0}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{q_0}.$$

В табл. 1 и 2 приведены безразмерные численные результаты расчета перемещений и напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  в верхнем (см. табл.1) и нижнем (см. табл.2) слоях прямоугольной пластины размером  $a=4H$ .

Таблица 1

Значения перемещений и напряжений в верхнем слое пластины ( $H/a=1/4$ )

$H/b$	$E_1 u_1^{(-)} / H q_0$	$E_1 u_2^{(-)} / H q_0$	$E_1 u_3^{(-)} / H q_0$	$\sigma_{11}^{(-)} / q_0$	$\sigma_{22}^{(-)} / q_0$	$\sigma_{12}^{(-)} / q_0$
1/4	2.7272	2.721	9.2723	-3.4814	-3.4781	1.6431
1/6	5.2532	3.5216	16.5332	-5.5653	-3.8142	2.1149
1/10	8.1813	3.2724	24.7134	-7.8283	-3.6742	1.9781

Таблица 2

Значения перемещений и напряжений в нижнем слое пластины ( $H/a=1/4$ )

$H/b$	$E_1 u_1^{(+)} / H q_0$	$E_1 u_2^{(+)} / H q_0$	$E_1 u_3^{(+)} / H q_0$	$\sigma_{11}^{(+)} / q_0$	$\sigma_{22}^{(+)} / q_0$	$\sigma_{12}^{(+)} / q_0$
1/4	-2.9112	-2.9108	8.8231	3.2649	3.2651	-1.7589
1/6	-5.5391	-3.6919	16.0842	5.4172	3.5583	-2.2311
1/10	-8.5520	-3.4209	24.2580	7.7349	3.3949	-2.0672

Таблица 3

Значения перемещений и напряжений на лицевой поверхности ортотропной пластины  $z=-h$  ( $H/a=1/3$ )

$H/b$	$E_1 u_1^{(-)} / H q_0$	$E_1 u_2^{(-)} / H q_0$	$E_1 u_3^{(-)} / H q_0$	$\sigma_{11}^{(-)} / q_0$	$\sigma_{22}^{(-)} / q_0$	$\sigma_{12}^{(-)} / q_0$
1/4	1.1974	1.5197	5.8981	-4.7687	-2.2907	1.1949
1/6	3.9891	4.5730	21.5971	-10.1604	-4.2105	2.5105
1/10	18.5115	19.5970	135.5506	-27.6392	-10.2250	6.7048

В табл. 3 и 4 представлены безразмерные численные результаты расчета перемещений  $u_1, u_2, u_3$  и напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  на лицевых поверхностях ортотропной пластины



$z=-h$  (см. табл.3) и  $z=+h$  (см. табл.4). Сопоставляя численные результаты, которые соответствуют квадратным пластинам с размерами в плане  $a=b=3H$ , находим, что для толстых ортотропных пластин значения напряжений и перемещений на лицевых поверхностях пластины отличаются существенно.

Таблица 4

Значения перемещений и напряжений на лицевой поверхности ортотропной пластины  $z=+h$  ( $H/a=1/3$ )

$H/b$	$E_1 u_1^{(+)} / Hq_0$	$E_1 u_2^{(+)} / Hq_0$	$E_1 u_3^{(+)} / Hq_0$	$\sigma_{11}^{(+)} / q_0$	$\sigma_{22}^{(+)} / q_0$	$\sigma_{12}^{(+)} / q_0$
1/4	-1.2031	-1.6411	5.4909	4.4793	2.0542	-1.2512
1/6	-4.0328	-4.7960	21.1875	9.9578	4.0071	-2.5890
1/10	-18.6190	-20.0043	135.1409	27.4880	10.0408	-6.7958

Максимальные значения перемещений и напряжений пластины достигаются на ее лицевых поверхностях и определяются решениями первой и второй задач по формулам (45).

**Динамический расчет шарнирно опертых толстых пластин.** Приведем результаты динамического расчета толстой пластины, находящейся под действием распределенной по синусоидальному закону динамической нагрузки в виде

$$q_1^{(-)} = 0, \quad q_2^{(-)} = 0, \quad q_3^{(-)} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0; \\ -q_0 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$q_1^{(+)} = 0, \quad q_2^{(+)} = 0, \quad q_3^{(+)} = 0,$$

где  $q_0$  – параметр внешней нагрузки.

Обобщенные перемещения пластины первой задачи, удовлетворяющие граничным условиям (50), представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= f_1(x_1, x_2) \bar{\eta}_1(t), \quad \bar{w}_2 = f_2(x_1, x_2) \bar{\eta}_2(t), \quad \bar{r} = f_3(x_1, x_2) \bar{\eta}_3(t), \\ \bar{\beta}_1 &= f_1(x_1, x_2) \bar{\eta}_4(t), \quad \bar{\beta}_2 = f_2(x_1, x_2) \bar{\eta}_5(t), \quad \bar{\gamma} = f_3(x_1, x_2) \bar{\eta}_6(t), \\ \bar{u}_1 &= f_1(x_1, x_2) \bar{\eta}_7(t), \quad \bar{u}_2 = f_2(x_1, x_2) \bar{\eta}_8(t), \quad \bar{W} = f_3(x_1, x_2) \bar{\eta}_9(t). \end{aligned} \quad (53)$$

Координатные функции для шарнирно опертых пластин имеют вид

$$f_1(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right); \quad f_2(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{b}\right); \quad f_3(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right).$$

Обобщенные перемещения пластины второй задачи, удовлетворяющие граничным условиям (50), записываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= f_1(x_1, x_2) \tilde{\eta}_1(t), \quad \tilde{w}_2 = f_2(x_1, x_2) \tilde{\eta}_2(t), \quad \tilde{r} = f_3(x_1, x_2) \tilde{\eta}_3(t), \\ \tilde{\beta}_1 &= f_1(x_1, x_2) \tilde{\eta}_4(t), \quad \tilde{\beta}_2 = f_2(x_1, x_2) \tilde{\eta}_5(t), \quad \tilde{\gamma} = f_3(x_1, x_2) \tilde{\eta}_6(t), \\ \tilde{u}_1 &= f_1(x_1, x_2) \tilde{\eta}_7(t), \quad \tilde{u}_2 = f_2(x_1, x_2) \tilde{\eta}_8(t), \quad \tilde{W} = f_3(x_1, x_2) \tilde{\eta}_9(t). \end{aligned} \quad (54)$$

После разделения переменных в виде (53) и (54) получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения пластины относительно функций времени  $\bar{\eta}_1(t), \bar{\eta}_2(t), \dots, \bar{\eta}_9(t)$  и  $\tilde{\eta}_1(t), \tilde{\eta}_2(t), \dots, \tilde{\eta}_9(t)$  для первой и второй задач, соответственно, которые решены по явной схеме методом конечных разностей при нулевых начальных условиях.

Расчеты выполнены для квадратной ортотропной пластины СВМ 15:1 для трех вариантов ее размеров в плане.

Максимальные значения нормальных напряжений на лицевых поверхностях пластины  $z=-h$  и  $z=+h$  достигаются в точке ортотропной пластины  $x_1=a/2, y_1=b/2$ , а максимальные значения касательных напряжений  $\sigma_{12}^{(-)}, \sigma_{12}^{(+)}$  – в точке пластины.  $x_1=0, y_1=b/2$ .

Представим результаты расчетов для ортотропных пластин с размерами в плане  $a=b=3H, 4H$ .

Максимальные значения нормальных напряжений ортотропной пластины  $a=b=3H$

на её лицевых поверхностях  $z=-h$  и  $z=+h$  обнаружены в центральной точке пластины и равны, соответственно,  $\sigma_{11}^{(-)} = -7.073q_0$ ,  $\sigma_{11}^{(+)} = 6.579q_0$ . Максимальные значения напряжений на лицевых поверхностях пластины  $z=-h$  и  $z=+h$  обнаружены в центральной точке пластины, и получились равными  $\sigma_{22}^{(-)} = -4.179q_0$ ,  $\sigma_{22}^{(+)} = 3.814q_0$ . Расчеты показывают, что нормальные напряжения на лицевых поверхностях пластины значительно отличаются друг от друга по величине.

По теории Тимошенко значения нормальных напряжений получились равными

$$\sigma_{11}^{(-)} = -\sigma_{11}^{(+)} = -5.134q_0 \text{ и } \sigma_{22}^{(-)} = -\sigma_{22}^{(+)} = -3.291q_0.$$

Максимальные значения нормальных напряжений ортотропной пластины с размерами в плане  $a=b=3H$  в верхнем и нижнем слоях  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  получились равными

$$\sigma_{11}^{(-)} = -11.113q_0, \sigma_{11}^{(+)} = 10.872q_0 \text{ и } \sigma_{22}^{(-)} = -6.063q_0, \sigma_{22}^{(+)} = 5.825q_0.$$

По теории Тимошенко нормальные напряжения оказались равными

$$\sigma_{11}^{(-)} = -\sigma_{11}^{(+)} = -9.541q_0 \text{ и } \sigma_{22}^{(-)} = -\sigma_{22}^{(+)} = -5.235q_0.$$

Выполненные расчеты показывают, что максимальные значения нормальных напряжений ортотропной пластины, полученные по бимоментной теории, до 40% больше, чем полученные по теории Тимошенко.

Преимущество бимоментной теории среди существующих теорий заключается в высокой точности и в хорошей применимости при решении различных практических задач для оценки напряжений и перемещений толстых пластин и пластинчатых сооружений при сейсмических воздействиях.

**Заключение.** Построены бимоментная теория и метод для оценки напряженно-деформированного состояния толстых пластин под действием внешних нагрузок. Впервые построены точные выражения сил и моментов, а также бимоментов, без использования разложением перемещения по толщине пластин и оболочек.

Построены уравнения движения прямоугольных толстых ортотропных пластин и граничные условия с учетом бимоментов. Построены аналитические решения задачи поперечного изгиба и колебаний толстых опертых по краям пластин под действием поперечной нормальной нагрузки.

Построено аналитико-численное решение задачи изгиба и колебаний изотропной и ортотропной пластин. Определены максимальные перемещения и напряжения для опертых пластин на основе точного решения. Показаны эффективность и точность предложенной бимоментной теории при оценке напряженно-деформированного состояния толстых пластин.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 360 с.
- [2] Горбачев В.И. Об одном подходе к построению теории пластин. М.: Изд. МГУ. 2006. С. 301–310.
- [3] Ахмедов А.Б. Действие сосредоточенных сил на упругую плиту // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент. 2006. №4. С. 5–9.
- [4] Си-Хунг Чанг, Цзянь-Куо Тарн. Трехмерные решения упругости прямоугольных ортотропных пластин // Журнал эластичности. 2012. Т. 108. №1. С. 49–66.
- [5] Усаров М.К. Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. (22). С. 40–47.
- [6] Усаров М.К. Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов // Инженерно-строительный журнал. 2015. №1. (53). С. 80–90.
- [7] Makhamatali K. Usarov «Dynamic Design of Thick Orthotropic Cantilever Plates with Consideration of Bimoments». // World Journal of Mechanics. 2016. 6. P. 341–356.
- [8] Usarov D., Turajonov K., Khamidov S. Simulation of free vibrations of a thick plate without simplifying hypotheses. // Journal of Physics: Conference Series. 2019. 1425. P. 012115.
- [9] Mirsaidov M., Usarov M. Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates. // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2020. № 614(1). P.012090.

Дата поступления  
06.10.2022

**Усаров М.К. Қалин ортотроп пластиналарнинг бимоментли назариясини такомиллаштириши**

**Аннотация:** Мақола уч ўлчовли эластиклик назарияси доирасида қалин пластиналарни ҳисоблаш усуллари ва бимоментли назариясини такомиллаштиришига бағишланган. Мақолада пластинанинг куч, момент ҳамда кўчиши ва кучланишларининг қалинлик бўйлаб нозичиқ қонун бўйича тарқалганлигини ҳисобга олганда юзага келадиган бимоментларга нисбатан тенгламалари ва чегаравий шартларининг асосий шифодалари келтирилган. Изотроп ва ортотроп пластиналарнинг эгилиши ва тебранишларини ҳисоблаш масаласи ечилган. Олинган сонли натижалар қалин пластиналарнинг кучланганлик-деформацияланганлик ҳолатини баҳолашда таклиф қилинган бимоментли назариясини қўллаш мақсадга мувофиқлигини кўрсатади.

**Калим сўзлар:** қалин ортотроп пластина, Гук қонуни, уч ўлчовли назария, ҳаракат тенгламалари, эластиклик назарияси, бимоментли назария, чексиз қатор, ташиқи кучлар.

**Usarov M.K. Improvement of the theory of orthotropic plates considering the bimoments**

**Abstract:** The article is devoted to the improvement of the bimoment theory and the method of calculating thick plates in the framework of the three-dimensional theory of elasticity. The basic relations, the equations of motion of the plate and the boundary conditions are given considering the forces, moments and bimoments arising from the nonlinearity of the law of distribution of displacements and stresses over its thickness. An example of calculating the bending and vibrations of isotropic and orthotropic plates is considered. The numerical results obtained show the effectiveness of the proposed bimoment theory in assessing the stress-strain state of thick plates.

**Keywords:** thick orthotropic plate, Hooke's law, three-dimensional theory, equations of motion, elasticity theory, bimoment theory, infinite series, external load.

УДК 624.19

## РАСЧЕТ СВОДЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ ТРАНСПОРТНОГО ГОРОДСКОГО ТОННЕЛЯ

**Миралимов М.Х., Усмонов Д.Т., Каршибоев А.И.**

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: mirzakhid\_miralimov@yahoo.com

**Аннотация:** Обосновано особое внимание в мире к вопросам совершенствования объёмно-планировочных решений конструкций транспортных тоннелей и метрополитена, теории и методам расчёта сооружений, учитывающим реальные особенности и свойства взаимодействия с грунтовыми массивами при различных нагрузках и воздействиях. Показано, что в данной сфере важнейшими актуальными проблемами являются повышение прочности и жёсткости тоннельных сооружений, разработка эффективных методов оценки деформирования конструкций при статических воздействиях. Установлено, что последующий расчёт крепи, внесение на основании расчёта необходимых корректив в конструкцию и повторение этих операций позволят добиться желаемого эффекта - обеспечение прочности, устойчивости и надёжности конструкции обделки при рациональном расходовании и наилучшем использовании материалов. Рассмотрены результаты расчётов железобетонной сводчатой конструкции транспортного тоннеля мелкого заложения со складчатым поперечным сечением, взаимодействующей с грунтом от действия грунтовой засыпки и современных транспортных нагрузок на поверхности земли.

**Ключевые слова:** тоннель; конструкция; грунт; транспортные нагрузки.

**Введение.** Известно, что грунтовый массив обладает многими и различными физико-механическими, гидрогеологическими и другими свойствами и могут оказать негативное воздействие на тоннельную конструкцию. При коэффициенте пассивного отпора более 200 кгс/см<sup>2</sup> грунтовая среда может полностью препятствовать возможным деформациям обделки тоннеля. Проведённые исследования показали, что свойства грунта, окружающего обделку тоннеля, с истечением определённого времени может изменяться, и таким образом изменяя в свою очередь работу конструкции обделки [1].

Для тоннельных обделок, расположенных в небольшой глубине, представляют наибольшую опасность большие смещения грунтов, особенно интенсивное воздействие транспортной нагрузки на поверхности земли [2]. Однако применение тоннельных сооружений из железобетонных сводчатых элементов допускается располагать при любых сочетаниях плана и профиля местности (на кривых в плане, при наличии вертикальных кривых как выпуклых, так и вогнутых и т. д.) и обеспечивает равномерное распределение временных нагрузок от автотранспорта в грунте, что значительно снижает статические и динамические воздействия [3].

Для объективной оценки конструкции из складчатых сводов (рис. 1) необходимо провести исследовательскую работу, в рамках которой модель системы «обделка–грунтовый массив», помимо веса грунта, загружается современными транспортными нагрузками, и

фиксируются параметры напряженно-деформированного состояния. Наиболее перспективным выглядит полное моделирование работы при помощи метода конечных элементов с использованием изопараметрических и стержневых плоских элементов [4]. При достаточном разбиении сетки из конечных элементов можно получить распределения главных и касательных напряжений в заданной области.

Для этого используем разработанную нами программу расчета методом конечных элементов «MODUL-C» [5]. Данная программа разработана как инструмент для производ-

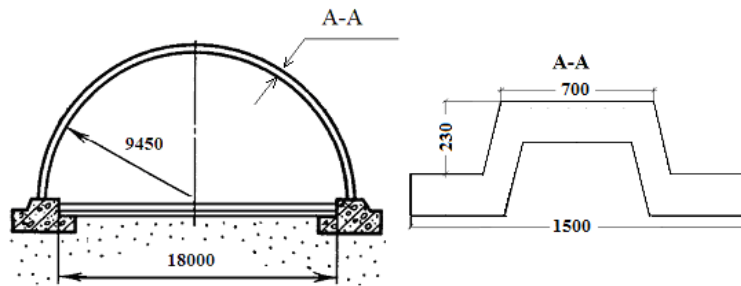


Рис. 1. Схема поперечного сечения сводчатого тоннеля со складчатым сечением, мм

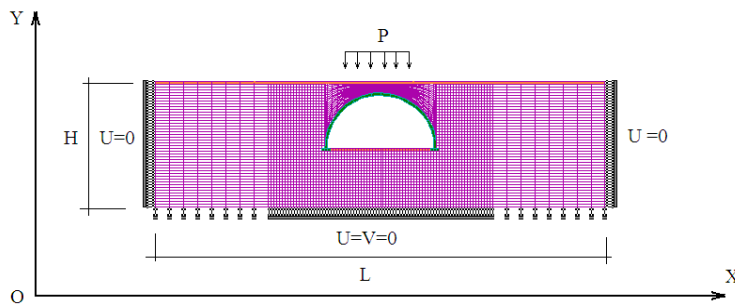


Рис. 2. Расчетная схема моделирования расчетной области в плоскости тоннельной обделки. Пролет железобетонного свода - 19.950 м, стрела подъема в ключе – 9.450 м. Свод покрывается засыпным грунтом высотой 2.0 м от ее поверхности с объемным весом  $\gamma=0.019 \text{ МН/м}^3$ , на толщине 0.25 м имеется асфальтобетонное дорожное покрытие с объемным весом  $\gamma=0.024 \text{ МН/м}^3$ . Свод изготовлен из бетона класса прочности В27.5, модуль упругости бетона  $E_b=31.5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , объемный вес бетона  $\gamma_b=0.025 \text{ МН/м}^3$ .

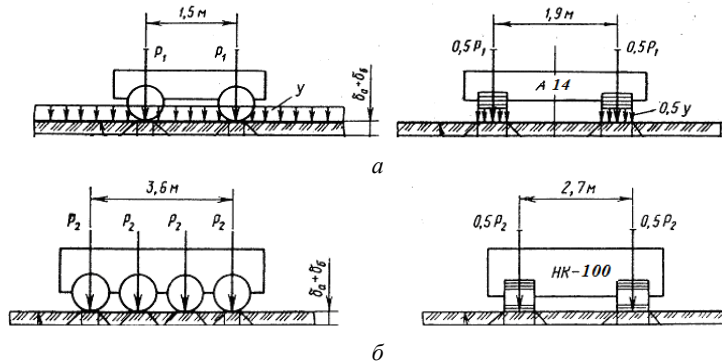


Рис.3. Схема определения вертикального давления от автотранспортных средств: а – А14, б – НК-100

стиками, поэтому рассматриваем следующие величины:  $E=12 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0.3$ . Область, в которой возводится тоннель, имеет соответствующие кинематические граничные условия, где  $H=30 \text{ м}$ ,  $L=80 \text{ м}$  (рис. 2). На первом этапе произведем расчет на постоянную нагрузку с учетом собственного веса тоннеля, вышележащего веса дорожного покрытия и окружающего грунта. Затем совместно со всеми постоянными нагрузками рассмотрены варианты, где временная подвижная автотранспортная нагрузка находится в двух схемах – А14 и НК-100 (рис.3) на основании [6,7].

ства расчетов тоннелей типовой конфигурации. В результате расчетов определяются внутренние усилия в обделке тоннеля (изгибающие моменты, поперечные и нормальные силы) и напряжения в грунте, окружающем обделку.

**Характеристика объекта исследования и расчет на заданные воздействия.** Численное решение задачи поведения сводчатой конструкции под действием грунтовой засыпки и транспортной нагрузки может быть использовано для определения характера и закона распределения внутренних усилий в сечениях свода, моделирующего конструкцию тоннельной конструкции.

При этом введем следующие параметры для расчета, где  $F=0.3629469 \text{ м}^2$  – площадь поперечного сечения и  $J=0.009763039 \text{ м}^4$  – момент инерции поперечного сечения тоннельной конструкции. Грунт, окружающий тоннель, имеет осадочные характери-

На рис.4, *а* приведена картина деформирования области от воздействия собственных масс сооружения, окружающего грунта и дорожного покрытия, а на рис.4, *б*—совместно временной нагрузкой А14.

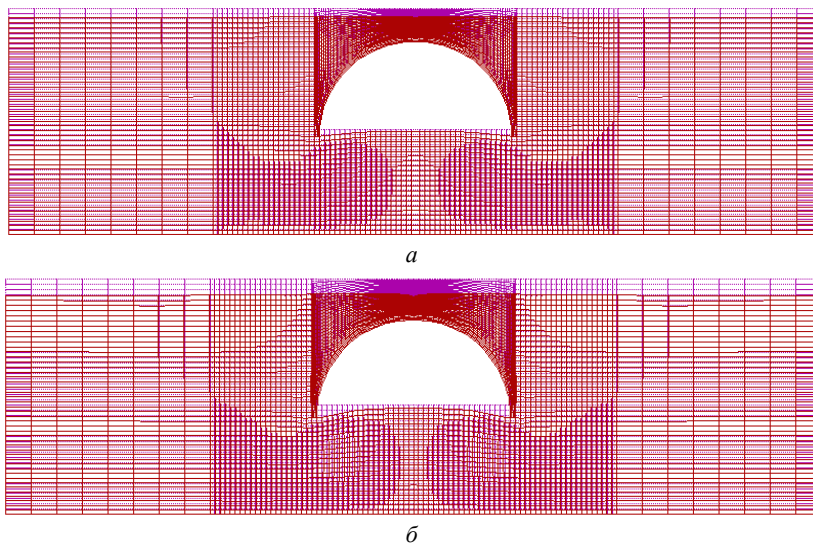


Рис.4. Картина деформирования области: *а* – от постоянной нагрузки; *б* – от временной подвижной нагрузки А14

Следует отметить, что 1-й тип транспортной нагрузки существенно влияет на деформирование области. Для просмотра отчетливой картины на рис. 5, 6 приводятся изохромы горизонтальных и вертикальных перемещений от нагрузок А14 и НК-100. В итоге обе нагрузки дают близкие результаты. В пятовых плитах тоннельного свода появляются максимальные перемещения. На рис. 7 приведены векторные поля главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , что доказывает вышеуказанное. На рис. 8–10 приведены изохромы горизонтальных  $\sigma_x$ , вертикальных  $\sigma_y$  и касательных напряжений  $\tau_{xy}$ .

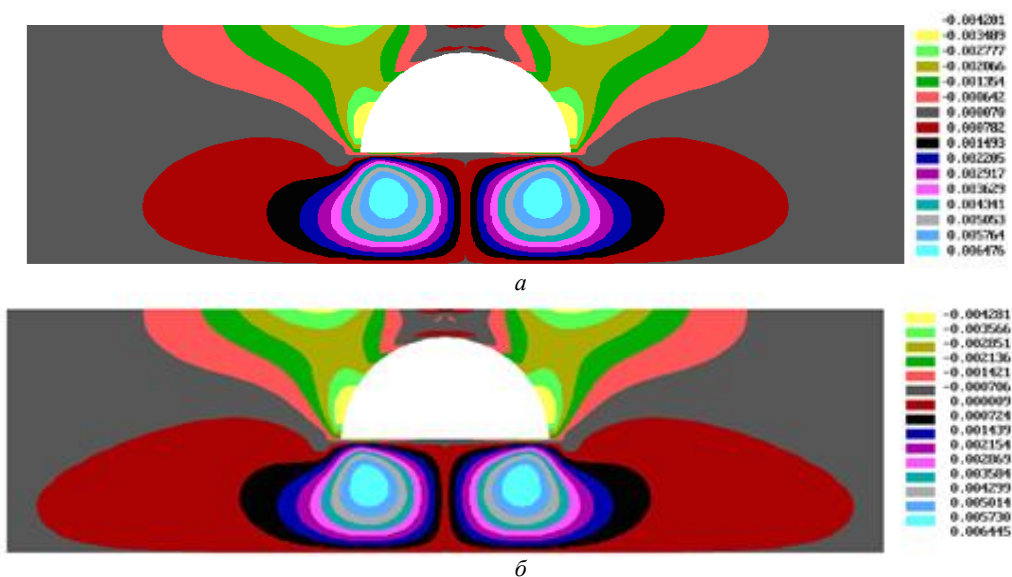


Рис.5. Изохромы горизонтальных перемещений, м: *а* – от нагрузки А14; *б* – от нагрузки НК-100

Из рис. 7–10 видно, что напряжения, переходя из грунтовой среды к элементам тоннельной конструкции, резко меняют свои значения.

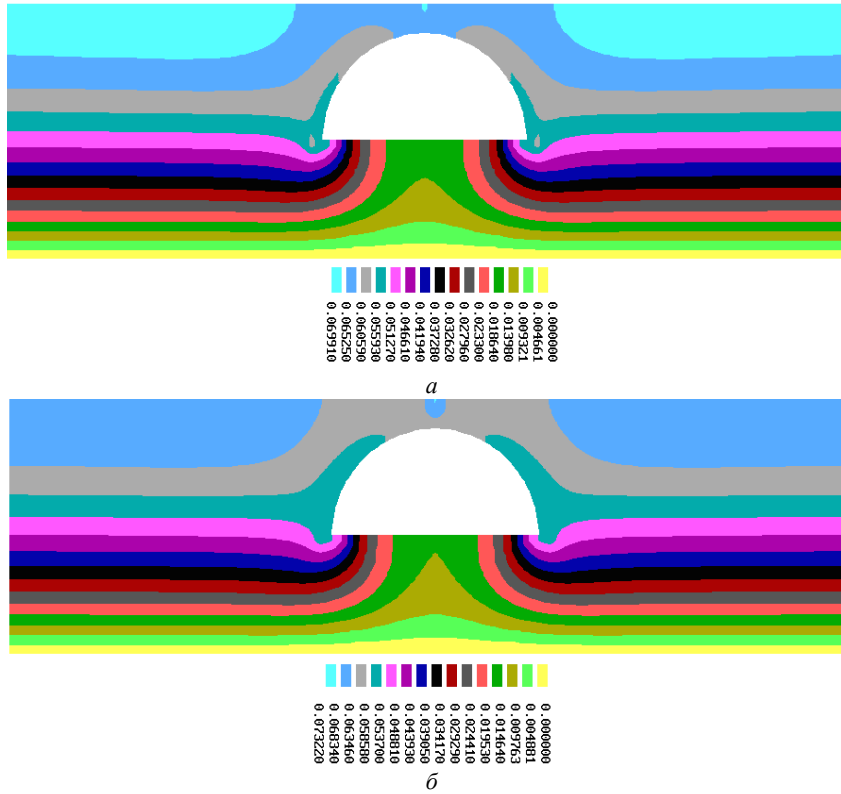


Рис. 6. Изохромы вертикальных перемещений, м: *a* – от нагрузки А14; *б* – от нагрузки НК-100

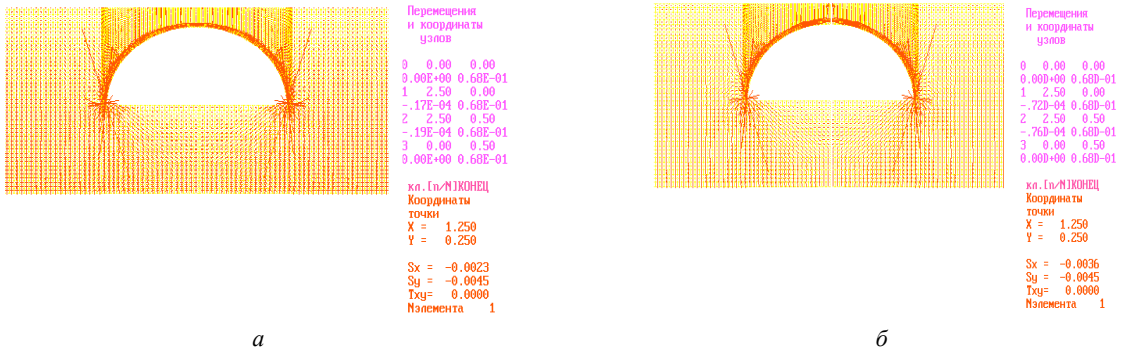


Рис. 7. Векторное поле главных напряжений, МПа: *a* – от нагрузки А14; *б* – от нагрузки НК-100

В последующем они могут быть использованы для трактовки влияния нагружающего эффекта пассивных сил со стороны грунтовой среды. В связи с этим на рис. 11 приведены распределения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  за обделкой полусвода (симметриальная часть).

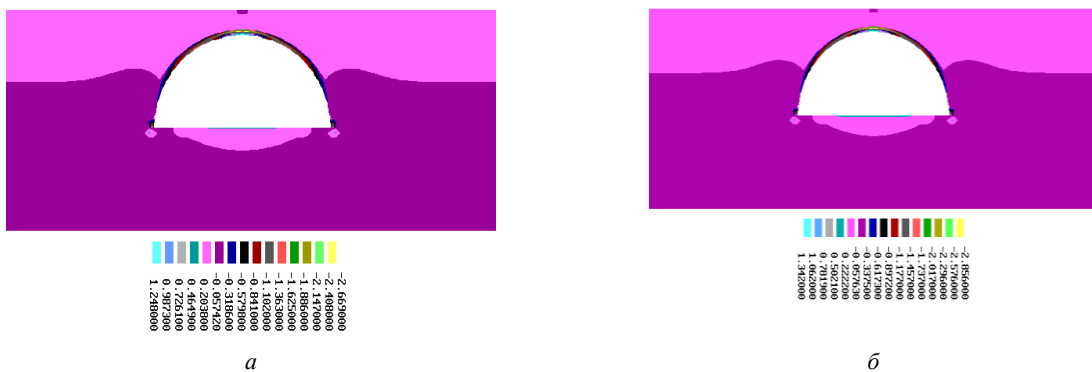


Рис. 8. Изохромы горизонтальных напряжений  $\sigma_x$ , МПа: *a* – от нагрузки А14; *б* – от нагрузки НК-100

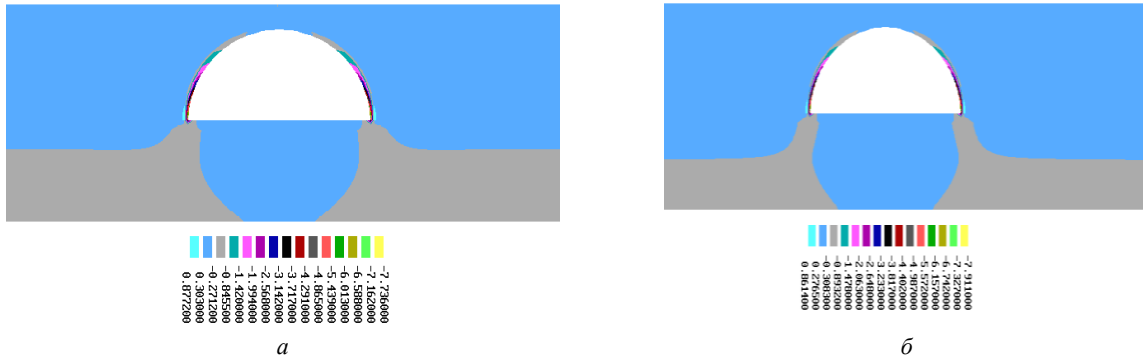


Рис. 9. Изохромы вертикальных напряжений  $\sigma_y$ , МПа: а – от нагрузки А14; б – от нагрузки НК-100

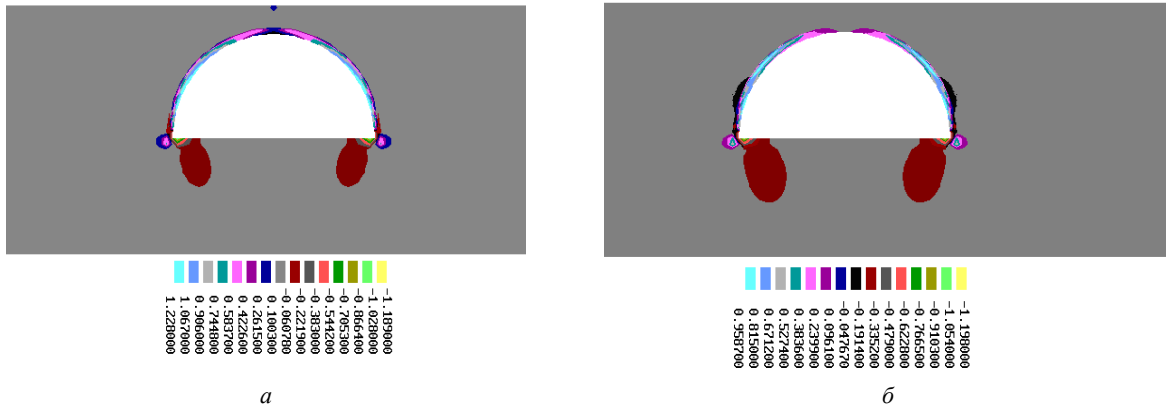


Рис. 10. Изохромы касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , МПа: а – от нагрузки А14; б – от нагрузки НК-100

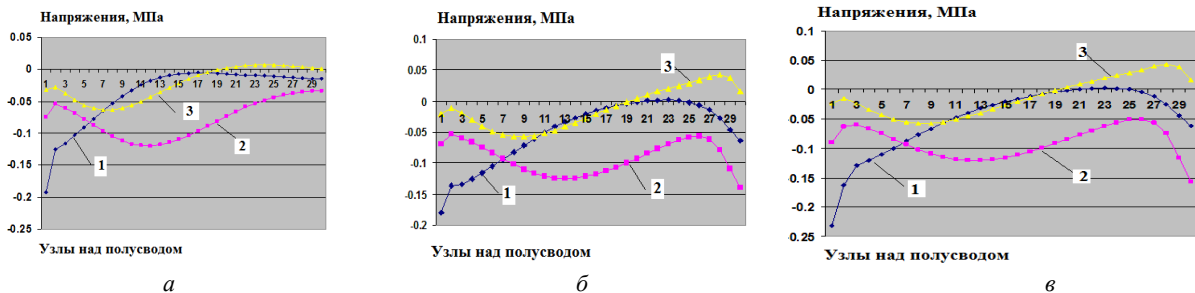


Рис. 11. Распределение напряжений  $\sigma_x$  (1),  $\sigma_y$  (2),  $\tau_{xy}$  (3), МПа: а – от постоянной нагрузки; б – от нагрузки А14; в – от нагрузки НК-100

Длина окружности полуэсвода – от 1 до 29 узлов, начиная с нижней части свода до центральной части тоннеля. Здесь во всех трех случаях максимальные напряжения получаются горизонтальными, и приближаясь к центру тоннеля, они снижаются. Вертикальные напряжения, наоборот, приближаясь к центру тоннеля, повышаются, но касательные напряжения при этом меняют знак. Временные нагрузки от автотранспорта существенно влияют на характер распределения напряжений, особенно в зоне их приложения. Повышение напряжений от нагрузки НК-100 больше примерно на 10–12%, чем нагрузки А14.

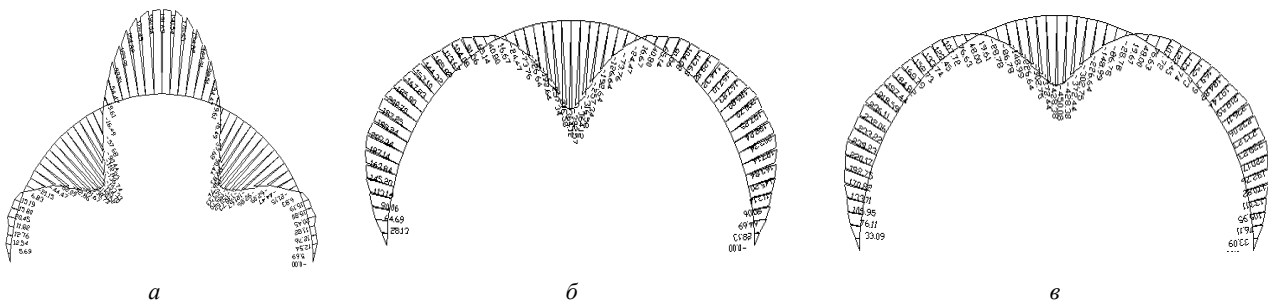


Рис. 12. Эпюры изгибающих моментов, кН·м: а – от постоянной нагрузки; б – от нагрузки А14; в – от нагрузки НК-100



При этом наблюдается эффект пассивного отпора грунта со стороны тоннеля, что увеличивает значения горизонтальных напряжений за стенкой тоннеля. Далее на основе приведенных напряжений построены эпюры изгибающих моментов и продольных сил для всех случаев нагружения тоннельной конструкции, которые приведены на рис. 12, 13. При этом максимальные значения моментов возникают в замке свода и продольных сил в нижней части свода.

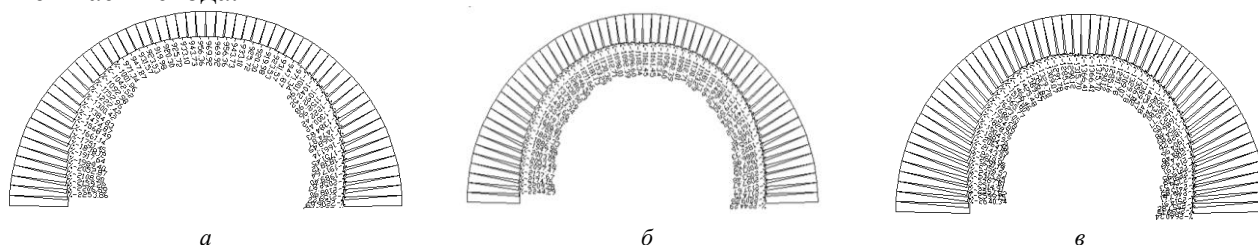


Рис. 13. Эпюры продольных сил, кН: а – от постоянной нагрузки; б – от нагрузки А14; в – от нагрузки НК-100

**Закключение.** Анализ решений показывает, что автотранспортная временная нагрузка дает существенный вклад в увеличение прогиба и внутренних усилий в виде изгибающего момента и продольной силы в сечениях железобетонной сводчатой конструкции. Максимальный прогиб от суммарного воздействия нагрузки отмечался в ключе свода, равном  $v=0.033$  м, значения максимального момента в этом сечении равны  $M=530.46$  кН·м, а продольной сжимающей силы  $N=820.23$  кН.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рашидов Т.Р., Ишанходжаев А.А. Сейсмостойкость тоннельных конструкций метрополитена мелкого заложения. Ташкент: Фан, 1994. – 133 с.
- [2] Маковский Л.В., Кравченко В.В., Сула Н.А. Автодорожные и городские тоннели России. Уч. пос. М.: МАДИ, 2016. – 136 с.
- [3] Мубаракوف Я. Н. Сейсродинамика подземных сооружений типа оболочек. Ташкент: Фан, 1990. – 211 с.
- [4] Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. – 661 с.
- [5] Миралимов М. Х., Алменов Х., Болтаев И., Мадждидов Н. Разработка пакета программ по расчету транспортных сооружений методом конечных элементов // Вестник ТАДИ. Ташкент: ТИПСЭАД, 2013. №3-4. С.56–61.
- [6] Миралимов М.Х. Numerical simulation of deformation of engineering design interacting with soil // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып.118. Ташкент, 2007. С. 85–97.
- [7] Miralimov M.Kh. Computing program of calculation of reinforced concrete structures. Proceedings of the Republican scientific conference "Development of autoroad complex in Republic of Uzbekistan". Tashkent, 27-28 September, 2001. P.18–21.

Дата поступления  
12.09.2022

**Миралимов М.Х., Усмонов Д.Т., Каршибоев А.И. Шаҳар транспорт тоннелининг гўмбазли конструкциясини ҳисоблаш**

**Аннотация:** Дунёда транспорт тоннеллари ва метрополитенларнинг ҳажмли-режавий ечимларини, турли юк ва таъсирларда грунт массивлари билан ўзаро таъсири ва реал хусусиятлари ҳисобга оладиган иншоотларни ҳисоблаш назарияси ва усулларини такомиллаштириши масалаларига алоҳида эътибор қаратилганлиги асосланган. Тоннель иншоотларининг мустаҳкамлиги ва бикрлигини ошириши, статик таъсир остида конструкциялар деформациясини баҳолашининг самарали усулларини ишлаб чиқиши ўшбу соҳадаги энг муҳим долзарб масалалардан эканлиги кўрсатилган. Рационал сарф ҳаражат ва энг яхши материаллардан фойдаланиб қоплама конструкциясини мустаҳкамлиги, устуворлиги ва ишончилигини таъминлаш бўйича қўтилган самарага эришиши имконини берадиган қирини ҳисоблаш, ҳисоблашлар асосида конструкцияга керакли тузатишларни киритиши ва ўшбу жараёнларни такрорлаш кераклиги кўрсатилган. Грунтнинг ва ер юзасидаги замонавий транспорт юклари таъсиридан грунт билан ўзаро таъсирдаги йиғма кўндаланг кесимли саёз жойлашган транспорт тоннелининг гўмбазли темирбетон конструкциясини ҳисоблаш натижалари кўриб чиқилди.

**Калим сўзлар:** тоннел; конструкция; грунт; транспорт юклари.

**Miralimov M.X., Usmonov D.T., Karshiboev A.I. Calculation of the vaulted structure of the urban transport tunnel**

**Abstract:** Special attention is paid worldwide to improving the space-planning solutions for the construction of transport tunnels and subway; theories and methods for calculating structures that take into account the real features and properties of interaction with soil under various loads and impacts are developed. At the same time, increasing the strength and rigidity of tunnel structures, and developing effective methods for assessing the structure strain under static effects remain the most important topical issues in this area. The subsequent calculation of the tunnel lining, implementation of necessary adjustments to the structure based on the calculation and repeating these operations, allow achieving the desired effect - ensuring the strength, stability and reliability of the lining structure with the rational and optimal use of materials. This article discusses the results of calculations of a reinforced concrete vaulted structure of a shallow transport tunnel with a folded cross-section interacting with soil on the impact of soil backfill and modern transport loads on the ground surface.

**Keywords:** tunnel; structure; soil; transport loads.



## ВЛИЯНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗДАНИЙ НА СКОЛЬЗЯЩЕМ ФУНДАМЕНТЕ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

Мирзаев И.<sup>1</sup>, Ювмитов А.С.<sup>2</sup>, Турдиев М.С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Email: [ibrakhim.mir@mail.ru](mailto:ibrakhim.mir@mail.ru), [anvar.sayfullaevich@mail.ru](mailto:anvar.sayfullaevich@mail.ru), [malikjon\\_ts@mail.ru](mailto:malikjon_ts@mail.ru)

**Аннотация:** Исследованы колебания зданий на скользящем фундаменте с сухим трением при действии реальных землетрясений интенсивностью 8 и 9 баллов по шкале MSK-64. Разработан уникальный алгоритм расчета перемещений, скоростей, ускорений и усилий, возникающих вследствие одновременного воздействия горизонтальной и вертикальной компонент записи сейсмограммы. Показано, что на сдвиговые колебания здания существенное влияние оказывает вертикальная составляющая сейсмического воздействия.

**Ключевые слова:** здание; сейсмическая изоляция; фторопласт; сухое трение; сейсмограмма.

**Введение.** В последние десятилетия в странах мира проводятся различные меры защиты зданий и сооружений от печальных последствий сильных землетрясений [1–10]. Одним из эффективных способов сейсмоизоляции является скользящий фундамент с использованием прослойки из фторопласта [6–9]. В работе [2] проведено исследование сейсмоизоляции в трубопроводной системе в виде тефлоновой прослойки. В численных исследованиях сейсмоизоляция смоделирована в виде сухого трения, но при реализации модель сухого трения заменяется моделью «идеального упругопластического тела». В работе [4] приведены исследования сейсмических колебаний многоэтажного здания со скользящей опорой. В численных расчетах использована модель взаимодействия в виде сухого трения. Однако условие начала скольжения написано неверно. В работе [3] приведены результаты исследования высотного здания с применением сейсмоизоляции в виде резинометаллической опоры.

В [11] описаны результаты обработки замеренных ускорений во время землетрясений трех зданий, построенных в г. Алматы в 1989 г. На этих трех зданиях с одинаковой надфундаментной частью (9-этажные крупнопанельные дома серии 158), но различными фундаментами: обычными ленточными, кинематическими и опорами с прокладками из фторопласта. При этом контактирующие поверхности с фторопластом имеют наклонные плоскости. 16 августа 2014 г. было зарегистрировано землетрясение, эпицентр которого был расположен в 41 км на восток от г. Алматы. Подземные толчки ощущались в г. Алматы в 4 – 5 баллов по шкале MSK-64. Максимальные величины спектрального коэффициента  $\beta$  для сейсмоизолируемых зданий в уровне 9-го этажа меньше аналогичной величины для здания-аналога: для зданий с фторопластовыми прокладками – на 11%, для зданий с кинематическим фундаментом – на 63%. В [8] рассмотрены вопросы выбора оптимального значения коэффициента сухого трения для снижения воздействия землетрясения на здания со скользящим фундаментом, когда здание моделируется как масса с пружиной, масса ростверка не учитывается. В [12–14] приведены результаты исследований пространственных конструкций зданий на действие реальных землетрясений по комплексу программ LS-DYNA. При изучении движения материальной точки на шероховатой плоскости [15–16] предполагается, что на материальную точку всегда действует сила сухого трения, направленная против движения, при этом многократные остановки и скольжения не рассмотрены.

В нелинейных задачах сейсродинамики подземных сооружений используют модель сухого трения при взаимодействии трубопровода с грунтом [17–18]. В [19] построена конечно-разностная аппроксимация уравнения движения стержня с внешним сухим трением и построен алгоритм решения, позже этот алгоритм использован в [20–22]. В [23] рассмотрены вертикальные колебания зданий с распределенными и сосредоточенными параметрами. В работах [24–25] численно исследована сейсродинамика подземных трубопроводов при гармонических и реальных воздействиях.

В работе для задач расчета зданий со скользящим фундаментом при действии сейсмических волн реальных землетрясений будет использован алгоритм, подобный описанному в [19].

**Постановка задачи.** Пусть заданы горизонтальное и вертикальное движения основания здания в виде сейсмограммы реального землетрясения. Будем считать, что нижняя часть фундамента здания приобретает такие же перемещения, а верхняя часть фундамента или ростверк разделена двухслойным фторопластом [6, 9]. В качестве модели взаимодействия двух слоев фторопласта по горизонтальному направлению примем модель сухого трения Кулона, по вертикальному направлению будем считать абсолютно жестко связанными.

Расчетная схема многоэтажного здания с учетом сейсмоизоляции с сухим трением по нормативному документу принимает следующий вид, приведенный на рис. 1.

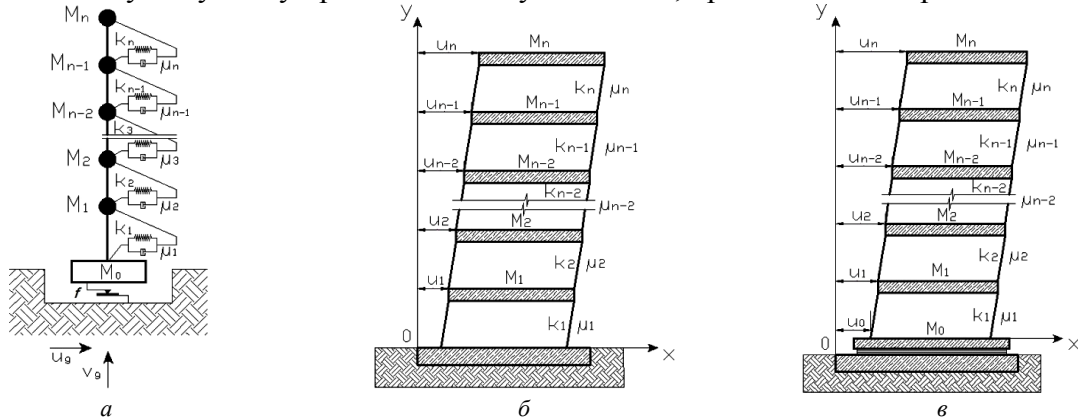


Рис. 1. Консольная расчетная схема в виде упругого стержня с сосредоточенными массами (а), расчетная схема многоэтажного здания в плоскости с жестким защемлением основания (б) и с сейсмоизоляцией (в)

Здание представим одномерной сдвиговой моделью с сосредоточенными массами и безынерционными упругими связями

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K] \cdot \{U\} = \{Q(t)\}, \quad (1)$$

$$\{U\} = \{U_{st}\}, \quad \{U\} = 0, \quad \text{при } t=0,$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс, массы расположены в уровнях этажей;  $[K]$  – матрица жесткостей;  $[C] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$  – матрица вязкости;  $\{U\} = \{u_0, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}^T$  – вектор перемещений;  $u_i, v_i$  – горизонтальные и вертикальные перемещения масс;  $\{U_{st}\}$  – вектор перемещений в начальный момент времени. Элементы, соответствующие сдвиговому перемещению, равны нулю, а соответствующие вертикальному перемещению определяются из решения статической задачи. Условие взаимодействия массы  $M_0$  со скользящим нижним фундаментом имеет вид

$$u_0 = u_g - u_r, \quad \text{если } |F_0| < |F_{fr}|, \quad \text{т.е. при совместном движении} \quad (2)$$

$$F_0 = F_{fr}, \quad \text{при скольжении} \quad (3)$$

$$v_0 = v_g, \quad (4)$$

где  $u_0, v_0$  – перемещения ростверка;  $u_g, v_g$  – горизонтальное и вертикальное перемещения нижней части фундамента, т.е. аппроксимированные функции оцифрованной сейсмограммы землетрясения;  $u_r$  – величина сдвига в момент времени в начале текущей совместной нижней части фундамента и движения ростверка, т.е. разность между значениями перемещений нижней части фундамента и ростверка (в начальный момент времени  $u_r = 0$ );  $F_0$  – неизвестное значение силы сцепления между верхним и нижним фундаментами;  $F_{fr} = \text{sign}(u_g - u_0) \cdot f \cdot P$  – значение силы сухого трения;  $f$  – коэффициент сухого трения;  $P$  – сила давления на скользящий элемент фундамента в динамическом процессе, если не учитывать вертикальные колебания, тогда это вес здания.

Следует отметить, что вертикальные колебания не зависят от горизонтальных колебаний зданий, а горизонтальные колебания зависят от вертикальных колебаний зданий через условие (3), так как во время вертикальных колебаний давление на скользящий фундамент изменяется.

При совместном движении перемещение  $u_0$  определяется по равенству (2) и уравнение движения массы  $M_1$  имеет вид

$$M_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + c_1 \dot{u}_1 - k_2 (u_2 - u_1) - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0. \quad (5)$$

В этом случае  $Q_1 = k_1 u_0 + c_1 \dot{u}_0$ , остальные элементы вектора  $\{Q\}$ , соответствующие горизонтальным перемещениям сосредоточенных масс, равны нулю. Уравнение вертикального движения массы  $M_1$  имеет вид, подобный (5), в правой части прибавляется  $M_1 g$ . Элементы вектора  $\{Q\}$ , соответствующие вертикальным перемещениям сосредоточенных масс, равны значениям весов соответствующих сосредоточенных масс.

Скольжение с сухим трением наступает только тогда, когда выполняется условие (3). Рассматриваемая задача (1), (2), (3) является нелинейной задачей, при этом отсутствуют условия вычисления неизвестной функции  $F_0$ , а также во время динамического процесса изменяются размерности матриц  $[M]$  и  $[K]$ . При скольжении имеет место уравнение для массы  $M_0$

$$M_0 \ddot{u}_0 - k_1 (u_1 - u_0) - c_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_0) = F_{fr}, \text{ при этом } Q_0 = F_{fr}.$$

Для решения задачи в целом воспользуемся следующим алгоритмом. На каждом шаге по времени решаем задачи в трех постановках:

1. Уравнение (1) решаем с условием (2).
2. Уравнение (1) решаем с условием (3), при  $F_0 = f \cdot P$ .
3. Уравнение (1) решаем с условием (3), при  $F_0 = -f \cdot P$ .

При этом матрицы  $[M]$  и  $[K]$  в первой постановке имеют размер  $2n \times 2n$  (здесь  $n$  – количество этажей здания), а во второй и третьей постановках  $-(2n+1) \times 2n$ . Выбор истинного решения из этих трех решений осуществляется следующим образом. Если относительные скорости  $\dot{u}_g - \dot{u}_0$  во второй и третьей постановках задач имеют разные знаки, тогда истинным решением является решение задачи в первой постановке, потому что приложенная сила сухого трения заставляет двигаться в разные стороны и значит неизвестная сила меньше предельного значения силы сухого трения, т.е. массы нижнего и верхнего фундаментов на этом шаге по времени движутся вместе без скольжения. Если относительные скорости во втором и третьем постановках задач имеют одинаковые знаки, тогда истинным решением является решение задачи в той постановке, в которой относительная скорость по абсолютному значению наименьшая, потому что сила сухого трения направлена против относительного движения. Все три задачи решаются методом Ньюмарка [2], оцифрованная сейсмограмма землетрясения аппроксимируется линейной функцией в интервале шага записи, когда шаг аппроксимации по времени меньше шага записи землетрясения.

Обсудим результаты расчетов на следующих примерах. Пусть заданы характеристики 4 - и 9 - этажных зданий, а также сейсмограммы следующих землетрясений:

1. Cairano 3 – 000319 (16.01.1981 г. 8 баллов по MSK-64, максимальное ускорение – 1.47 м/с<sup>2</sup>, максимальное перемещение – 0.0029 м, шаг оцифрования – 0.005 с, продолжительность – 22.175 с);

2. Tolmezzo-Diga Ambiesta – 000055 (06.05.1976 г. 9 баллов по MSK-64, максимальное ускорение – 3.35 м/с<sup>2</sup>, максимальное перемещение – 0.0039 м, шаг оцифрования – 0.005 с, продолжительность – 46.535 с);

3. Nocera Umbra 2 – 000856 (03.04.1998 г. 9 баллов по MSK-64, максимальное ускорение – 3.73 м/с<sup>2</sup>, максимальное перемещение – 0.0054 м, шаг оцифрования – 0.005 с, продолжительность – 40.990 с).

Четырехэтажное здание серии 76-017CA/53 имеет следующие характеристики: кирпичное здание размером в плане 389.88 м<sup>2</sup>; сосредоточенные массы в уровнях верхней части фундамента и этажей  $M_0=497575$  кг,  $M_1=495000$  кг,  $M_2=495000$  кг,  $M_3=495000$  кг,  $M_4=698000$  кг, при этом общий вес здания, давящий на нижнюю часть фундамента, равен

$P=26269635$  Н; сдвиговые жесткости по этажам одинаковы  $k_i=16.08 \cdot 10^8$  Н/м; вязкость материала здания по этажам одинакова  $\mu_i=26.9 \cdot 10^5$  Нс/м. Значения частот собственных колебаний с жесткой заделкой фундамента:  $\omega_1=29$  Гц,  $\omega_2=54$  Гц,  $\omega_3=76$  Гц.

Девятиэтажное здание серии 76-017СП/53 имеет следующие характеристики: крупнопанельное здание размером в плане  $291.6$  м<sup>2</sup>; сосредоточенные массы в уровнях верхней части фундамента и этажей  $M_0=449000$  кг,  $M_1=379500$  кг,  $M_2=379500$  кг,  $M_3=379500$  кг,  $M_4=379500$  кг,  $M_5=379500$  кг,  $M_6=379500$  кг,  $M_7=379500$  кг,  $M_8=379500$  кг,  $M_9=341000$  кг, при этом общий вес здания, давящий на нижнюю часть фундамента, равен  $P=37494800$  Н; сдвиговые жесткости по этажам одинаковы  $k_i=32.357 \cdot 10^9$  Н/м; вязкость материала здания по этажам одинакова  $\mu_i=10.58 \cdot 10^6$  Нс/м. Значения частот собственных колебаний с жесткой заделкой фундамента:  $\omega_1=79$  Гц,  $\omega_2=160$  Гц,  $\omega_3=239$  Гц,  $\omega_4=314$  Гц,  $\omega_5=380$  Гц.

**Результаты расчетов и их обсуждение.** При численном решении задач с сухим трением, независимо от выбора явной или неявной конечно-разностной схемы, шаг по времени необходимо подбирать для обеспечения достаточной точности. В наших примерах расчетов шаг по времени был равен  $0.0001$  с. Полученные результаты приведены в виде графиков перемещений и перерезывающих сил четырехэтажного и девятиэтажного зданий (рис. 2–5).

На рис. 2 представлены результаты расчетов изменения перемещений по времени верхней и нижней частей фундамента четырехэтажного здания при землетрясении №1 с учетом горизонтального воздействия (а) и одновременно горизонтального и вертикального воздействий (б) реальных записей землетрясений. Время начала скольжения от начала процесса воздействия сейсмической волны равны:  $3.67$  с (см.рис.2,а) и  $3.01$  с (см.рис.2,б). Возникновение первого скольжения связано с изменением направления движения нижнего фундамента. Далее происходит смена перехода от скольжения с сухим трением к совместному движению и обратно много раз, в зависимости от рассмотренных выше условий. К концу процесса остаточный сдвиг равен  $0.0028$  м при горизонтальном воздействии и  $0.0019$  м при учете вертикального движения.

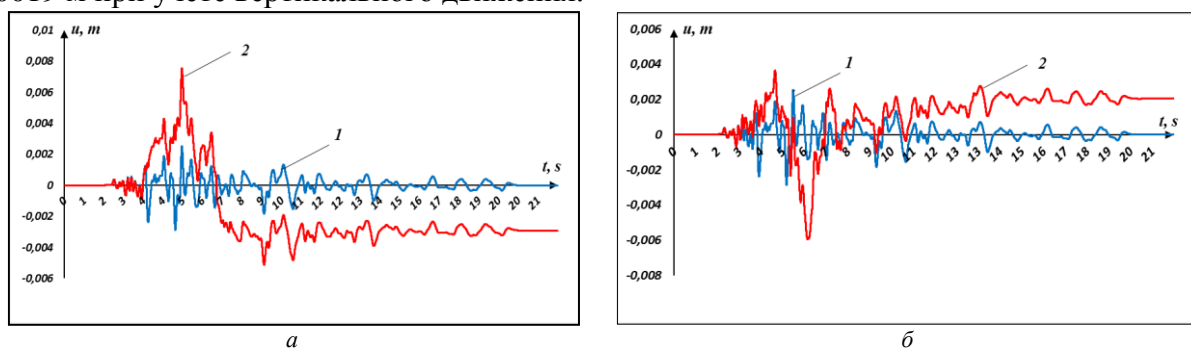


Рис. 2. Горизонтальные смещения нижней (1) и верхней (2) частей фундамента во времени четырехэтажного здания с учетом горизонтального (а) и одновременно горизонтального и вертикального воздействия (б) при реальных записях землетрясений

На рис.3 представлены результаты расчетов изменения перемещений по времени верхней и нижней частей фундамента девятиэтажного здания при землетрясении №1 с учетом горизонтального воздействия (а) и одновременно горизонтального и вертикального воздействия (б) реальных записей землетрясений. Время начала скольжения от начала процесса воздействия сейсмической волны равны:  $2.49$  с (см.рис.3,а) и  $2.47$  с (см.рис.3,б). Далее происходит смена перехода от скольжения с сухим трением к совместному движению и обратно много раз, в зависимости от рассмотренных выше условий. К концу процесса остаточный сдвиг равен  $0.0011$  м при горизонтальном воздействии и  $0.0014$  м при учете вертикального движения. Из рис.2 и 3 видно сильное влияние вертикального воздействия на процесс горизонтального колебания зданий.

На рис. 4–5 представлены результаты расчетов изменения сдвиговых усилий по времени на первом этаже четырехэтажного и девятиэтажного зданий при землетрясении №1 для случаев без учета и с учетом скользящего элемента. Из этих графиков видно, что использование скользящего фундамента с фторопластом с коэффициентом сухого трения  $f=0.05$  приводит к снижению максимального значения сдвигового усилия в 2.7 и 2.3 раза по отношению к случаю отсутствия скользящего фундамента, при этом учет вертикального движения снижает в 6.4 и 5.4 раза, соответственно для четырехэтажного и девятиэтажного зданий.

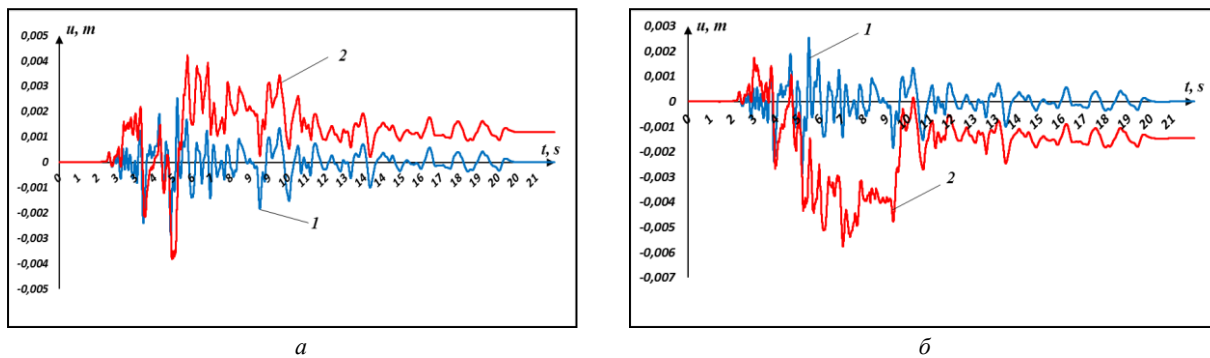


Рис. 3. Горизонтальные смещения нижней (1) и верхней (2) частей фундамента с течением времени девятиэтажного здания с учетом горизонтального (а) и одновременного горизонтального и вертикального воздействия (б) при реальных записях землетрясений

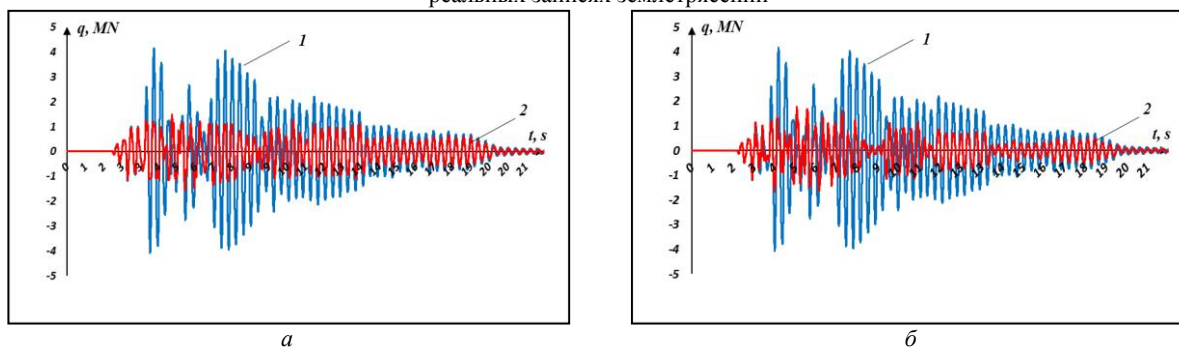


Рис. 4. Изменение силы сдвига на первом этаже четырехэтажного здания без учета скольжения (1) и с учетом скольжения (2) горизонтального (а) и одновременного горизонтального и вертикального воздействия (б) при реальных записях землетрясений

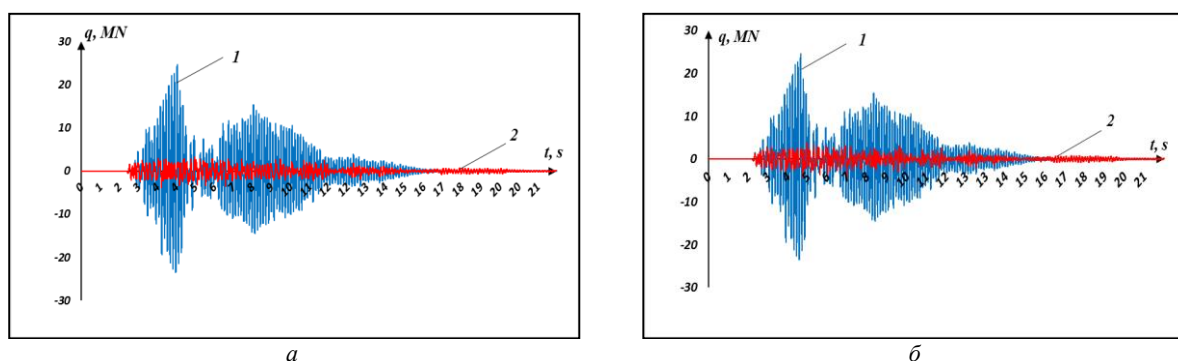


Рис. 5. Изменение силы сдвига на первом этаже девятиэтажного здания без учета скольжения (1) и с учетом скольжения (2) горизонтального (а) и одновременного горизонтального и вертикального воздействия (б) при реальных записях землетрясений

В [9], исходя из экспериментальных результатов, написано, что фторопласт может снизить нагрузку до четырех раз. Вычислительный эксперимент показал, что в отдельных случаях фторопласт в скользящем фундаменте может снизить максимальную нагрузку от землетрясения до 9 раз. Увеличение коэффициента сухого трения снижает эффективность скользящего фундамента. Для слабых землетрясений здания не будут чувствовать наличие

скользящего фундамента [11]. На колебания зданий при землетрясениях №2 и №3 также сильное влияние оказывает вертикальная компонента сейсмического воздействия.

При землетрясении №2 снижение максимального значения сдвигового усилия в 8.9 и 1.1 раза по отношению к случаю отсутствия скользящего фундамента, при этом учет вертикального движения снижает в 4.2 и 1.6 раза, соответственно для четырехэтажного и девятиэтажного зданий. При землетрясении №3 снижение максимального значения сдвигового усилия в 3.2 и 3.8 раза по отношению к случаю отсутствия скользящего фундамента, при этом учет вертикального движения снижает в 3.0 и 3.5 раза соответственно для четырехэтажного и девятиэтажного зданий.

**Выводы.** Приведен алгоритм численного решения задачи колебания зданий со скользящим фундаментом по модели сухого трения Кулона с учетом остановок скольжения при одновременном воздействии горизонтального и вертикального компонент сейсмограммы реальных землетрясений. На примере четырехэтажного и девятиэтажного зданий на основе записей трех землетрясений показано, что использование скользящего фундамента не всегда приводит к многократному снижению сдвигового усилия, а учет вертикальной компоненты сейсмограммы существенно влияет на процесс сдвигового колебания здания. При использовании скользящего фундамента для снижения действия землетрясения необходимо, исходя от площадки строительства, подбирать близкие по преобладающим частотам записи сейсмограмм и проводить вычисления по описанному алгоритму при одновременном воздействии горизонтального и вертикального компонент сейсмограммы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Bakre S.V., Jangid R.S., Reddy G.R.* Seismic Response of Piping Systems with Isolation Devices 13th World Conference on Earthquake Engineering Vancouver. 2004. № 2676.
- [2] *Chopra A.K.* Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering 4th Edition (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey). 2012. P. 994.
- [3] *Kentro Nakagawa., Dai Shimazaki., Satoshi Yoshida., Ken Okada.* Application of Seismic Isolation Systems in Japanese High-Rise Buildings CTBUH Journal. 2015. № 2. P. 36–40.
- [4] *Sanjaya K. PATRO., Ravi SINHA.* Influence of Friction Models on Response Evaluation of Buildings with Sliding Isolation Devices 13th World Conference on Earthquake Engineering Vancouver. 2004. № 1373.
- [5] *Костарев В., Васильев П., Навроцкий П.* Инновационная система полной сейсмоизоляции АЭС с реакторами ВВЭР, возводимых в районах умеренной и большой сейсмичности до 10 баллов по шкале МСК-64 // 4-ая Научно-техническая конференция СРО атомной отрасли АТОМСТРОЙСТАНДАРТ, 2017.
- [6] *Кузнецов В.Д., Чэнь Сятин.* Скользящий пояс с фторопластом сейсмостойкого здания // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 3.
- [7] *Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И.* Прикладные задачи сейсродинамики сооружений. Книга 1. Действие сейсмических волн на подземный трубопровод и фундаменты сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой. Ташкент: Navro'z, 2019. – 268 с.
- [8] *Уздин А.М., Сандович Т.А., Аль Насер Мохомад Самих Амин.* Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. Спб.: ВНИИГ им Б Е Веденеева, 1993. – 176 с.
- [9] *Чэнь Сятин.* Сейсмоизолированное здание со скользящим фторопластным поясом. 2011. – 86 с.
- [10] *Ювмитов А.С., Хакимов С.Р.* Исследование влияния сейсмоизоляции на динамические характеристики здания АСТА ТТРУ 2 2020. С. 59–65.
- [11] *Лапин В.А., Ержонов С.Е., Даугавет В.П.* Сравнительный анализ эффекта сейсмоизоляции с использованием инструментальных записей станций инженерно-сейсмометрической службы // Проблемы механики. 2018. № 4. С. 14–18.
- [12] *Mkrtychev O.V., Bunov A.A.* Calculation on displacements features of seismic isolated building // Vestnik MGSU. 2014. № 6. P. 63–70.
- [13] *Mkrtychev O.V., Mingazova S.M.* Analysis of the reaction of reinforced concrete buildings with a varying number of stories with a seismic isolation sliding belt to an earthquake // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 2020. № 869 P. 052065.
- [14] *Mkrtychev O.V., Mingazova S.M.* Study of the seismic isolation sliding belt: the case of a monolithic reinforced concrete building // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. №1425 012161.
- [15] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
- [16] *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS, 2011. – 205 с.
- [17] *Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р.* О действии сейсмической волны на подземный трубопровод // Изв. АН РУз. Сер. техн. Наук. 1971. № 1. С. 3–11.
- [18] *Никитин Л.В.* Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. Лицей. 1998. – 272 с.
- [19] *Мирзаев И.М.* Динамика предварительно напряженного стержня при действии ударной нагрузки Динамические задачи неупругой среды. Динамика сплошной среды. Институт гидродинамики СО РАН СССР. Вып.71. 1985. С.65–74.
- [20] *Aleksandrova N.I.* Numerical-analytical investigation into impact pipe driving in soil with dry friction Part I Nondeformable external medium Journal of Mining Science. 2012. №48. P. 856–869.
- [21] *Isakov A.L., Shmelev V.V.* Wave processes when driving metal pipes into the ground using shock-pulse generators // Journal of Mining Science. 1998. №34. P. 139–147.

- [22] Smirnov A.L. Computation of the process of impact submersion of a pile in the ground Soviet Mining. 1989. №25. P. 359–365.
- [23] Mirzaev I.M. Reactions of composite structures, with concentrated and distributed parameters, to seismic action (vertical vibrations) Sov Min Sci. 1976. №12(3). P. 296–300.
- [24] Bekmirzaev D.A., Mirzaev I. Earthquake Resistance Assessment of Buried Pipelines of Complex Configuration Based on Records of Real Earthquakes Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2021. 57. Т 6. P. 491–496.
- [25] Bekmirzaev D., Mirzaev I., Mansurova N., Kosimov E., Juraev D.P. Numerical methods in the study of seismic dynamics of underground pipelines IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. №869(5). P. 052035.

Дата поступления  
21.07.2022

**Мирзаев И., Ювмитов А.С., Турдиев М.С. Зилзила пайтида сирпанувчи пойдеворли биноларнинг силжишига вертикал тебранишларнинг таъсири**

**Аннотация:** МСК-64 шкаласи бўйича 8 ва 9 балли бўлиб ўтган зилзилаларнинг таъсирида қуруқ ишқаланишга эга сирпанувчи пойдеворли биноларнинг тебраниши тадқиқ қилинган. Бир пайтнинг ўзиде сейсмограмманинг горизонтал ва вертикал ёзувлари кўринишидаги таъсирида кўчишлар, тезликлар, тезланишлар ва кучларни ҳисоблаш алгоритми ишлаб чиқилган. Сейсмик таъсирнинг вертикал ташиқил этувчиси бинонинг горизонтал тебранишига катта таъсир қилиши кўрсатилган.

**Калим сўзлар:** бино; сейсмик изоляция; фторопласт; қуруқ ишқаланиши; сейсмограмма.

**Mirzaev I., Yuvmitov A.S., Turdiev M.S. The effect of vertical vibrations on shear vibrations of buildings on the sliding foundation during an earthquake**

**Abstract:** Vibrations of buildings on a sliding foundation with dry friction under the action of real earthquakes of an intensity of 8 and 9 points on the MSK-64 scale are investigated. A unique algorithm was developed for calculating displacements, velocities, accelerations and forces resulting from the simultaneous impact of horizontal and vertical components of the seismogram recording. It is shown that the vertical component of the seismic impact has a significant effect on the shear vibrations of the building.

**Keywords:** building; seismic isolation; fluoroplastic; dry friction; seismogram.

УДК 539.3+624.21

## МЕТОДИКА ВИБРОДИАГНОСТИКИ ТИПОВЫХ БАЛОЧНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ

**Бердибаев М.Ж.<sup>1</sup>, Галиаскаров В.А.<sup>1</sup>, Нишонов Н.А.<sup>1</sup>, Рахимжонов З.К.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: mars.berdibaev@mail.ru

**Аннотация:** В статье представлены экспериментальные данные форм и частот собственных колебаний железобетонных автодорожных мостов при нагружении постоянными нагрузками и съезде подвижного состава с пролетного строения. Результаты данного исследования в дальнейшем могут быть использованы при проектировании мостовых сооружений, а также для выявления дефектов в элементах конструкций автодорожных мостов. Статья направлена на совершенствование методов измерения динамических характеристик конструкций мостов, основанных на использовании современных средств измерений, персональных компьютеров и программного обеспечения. Решение поставленной задачи включает совершенствование методик вибродиагностики балочных пролетных строений железнодорожных мостов с целью оперативного выявления дефектов, снижающих несущую способность сооружения. Эти методики позволят производить оценку технического состояния эксплуатируемых балочных пролетных строений железнодорожных мостов и уточнять их несущую способность.

**Ключевые слова:** автодорожный мост; пролётное строение; подвижная нагрузка; балка; колебания.

**Введение.** Постоянный рост автомобильных перевозок, увеличение мощности и грузоподъемности автопарка ведут к преждевременному износу несущих конструкций мостовых сооружений и, как следствие, к необходимости их ремонта раньше проектного срока.

На сети автомобильных дорог Узбекистана эксплуатируются несколько тысяч железобетонных пролетных строений, построенных по типовым проектам. Оценка технического состояния типовых балочных железобетонных пролётных строений автодорожных мостов по действующим нормам требует выполнения широкого комплекса работ по обследованию и испытаниям. Для обеспечения безопасного пропуса автотранспорта без ограничения скоростей их движения необходимо оперативно выявлять возникающие в пролетных строениях неисправности.

Обследования мостовых сооружений включают визуальный осмотр, фотофиксацию, отбор и исследование образцов материалов, лазерное ультразвуковое сканирование и



вибродиагностику. При этом вибродиагностика одновременно является и методом динамических испытаний мостовых сооружений. Анализ влияния выявленных дефектов на техническое состояние мостовых сооружений, в том числе на несущую способность пролетных строений при вибродиагностике, осуществляется путем сравнения результатов измеренных на натурном объекте амплитудно - частотных характеристик (АЧХ) с расчетными (проектными). Для идентификации математических моделей на основе данных натурных исследований необходимо изучить влияние конкретных видов дефектов на АЧХ типовых балочных пролетных строений.

Новые сооружения, на которых ограничения, как правило, не вводят, могут также получать значительные динамические воздействия от проходящей нагрузки, связанные с недостатками конструкций и статической схемы пролетного строения. В связи с этим создание научно обоснованной современной методики оценки динамических воздействий подвижной нагрузки на пролетные строения автодорожных мостов является актуальной задачей.

Применявшиеся до последнего времени методы и технические средства, с помощью которых производилось определение динамических характеристик пролетных строений мостов, во многом устарели, и не позволяют в достаточной мере давать ответы на вопросы, возникающие при обследовании и испытаниях мостов.

Формы колебаний, помимо собственных частот колебаний, являются основным количественным источником информации, который описывает динамическое поведение сооружения [1].

Динамическая диагностика осуществляется в три этапа, первые два из которых осуществляются в полевых условиях, а третий – на стадии камеральной обработки результатов [2]. Даны примеры вибродиагностики состояния сооружений. Вибродиагностика особенно актуальна при исследовании фактической динамической работы пешеходных мостов [3].

Свой научный вклад в изучение динамических воздействий на мосты в разное время внесли отечественные ученые [4–21].

**Методы.** Автодорожный мост через канал расположен на км 22+400 автомобильной дороги 4Р197 «автодорога «Пахтакор – Чимкурган» – г. Зафаробод – г. Гагарин» и построен ориентировочно в 1974 г. (рис. 1).

Схема моста – 3х11.36 м. Мост на дороге III технической категории с пролетами по 11.36 м, имеет габарит Г-7.60м и тротуары шириной 60 и 75 см. Мост трехпролетный. Пролетные строения скомпонованы из шести балок таврового сечения с ненапрягаемой арматурой. Балки объединены между собой при помощи железобетонных швов омоноличивания на уровне плит проезжей части.

Пролетные строения имеют полную длину 11.36 м. Расчетный пролет – 10.7 м. Высота балок – 80 см. Толщина плиты проезжей части – 15 см. Расстояние между ребрами балок – от 161 до 176 см.



Рис. 1. Общий вид моста



В результате прохождения автомобилей разной грузоподъемности мост подвергается различным динамическим нагрузкам. Для технической оценки состояния эксплуатируемого моста необходимо провести инструментальные измерения и сравнить с расчетными данными, заложенными при проектировании.

Для измерения динамических характеристик автомобильного моста применили мобильную инженерно-сейсмометрическую станцию (МИСС), разработанную в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз в 2016 г. Подробная информация о структуре станции, принципе работы, подготовке ее к эксплуатации, методике калибровки измерительных каналов, методике регистрации колебаний объекта при динамических процессах приведены в научно-техническом отчете [22].

На рис. 2 приведена структурная схема четырехканальной мобильной инженерно-сейсмометрической станции. В состав каждого измерительного канала входят: входной делитель, усилитель, аналого-цифровой преобразователь (АЦП), один на все каналы, ноутбук с программным обеспечением. К входу измерительного канала подключается сейсмометр. Входной делитель напряжения ограничивает входную величину ЭДС сейсмометра до величины, при которой входной сигнал не имеет искажений. Усилитель усиливает слабые сигналы сейсмометров. АЦП преобразовывает аналоговые сигналы в цифровой код для работы компьютера. Компьютерная программа сохраняет поступающие с сейсмометров данные, обрабатывает их и представляет в виде графиков колебания исследуемого участка моста в режиме реального времени на мониторе ноутбука. При измерениях задействовано три канала, четвертый был в резерве.

Для исследования динамических характеристик колебаний моста были выбраны три измерительных точки (рис. 3). Измерительные точки ИТ-1 и ИТ-3 были расположены недалеко от откосов, измерительная точка ИТ-2 расположена в средней части пролета моста. Были использованы сейсмометры ОСП-3. Для получения полной информации по результатам наблюдения в каждой измерительной точке регистрируются колебания в трех взаимно перпендикулярных направлениях: вдоль моста (продольном), поперек моста (поперечном) и вертикальном.

Расположение сейсмометров показано на рис. 4.

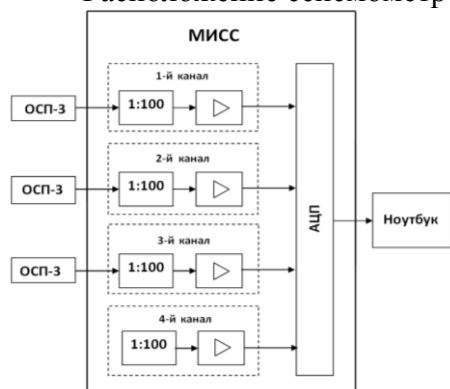


Рис. 2. Структурная схема 4-канальной мобильной инженерно - сейсмометрической станции

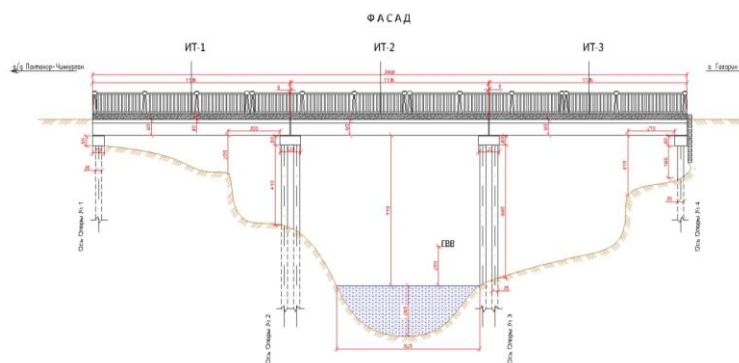


Рис. 3. Расположение измерительных точек на пролете моста



Рис. 4. Расположение сейсмометров ОСП-3 в измерительных точках

**Результаты и обсуждение.** Рассмотрим методику расчета перемещений при колебаниях моста, вызванных прохождением легкового автомобиля «Nexia» (рис. 5). На рис. 5 представлены графики колебаний от трех сейсмометров, расположенных в измерительной точке ИТ-1 и регистрированной МИСС. В левой стороне рис. 5 указаны виды колебаний: продольные, поперечные и вертикальные. В правой стороне рис. 5 в конце каждого графика программой проставлено в вольтах:

- продольные колебания  $V_{c1}=1.165$  В;
- поперечные колебания  $V_{c2}=1.865$  В;
- вертикальные колебания  $V_{c3}=2.04$  В.

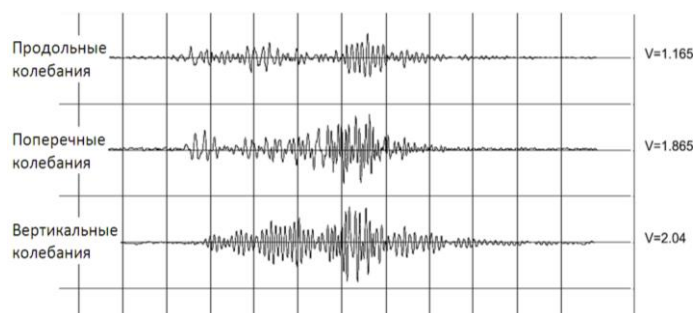


Рис. 5. Регистрация движения легкового автомобиля Nexia при  $\beta_1=2, \beta_2=2, \beta_3=10$  (3-е, изм.)

Расчет перемещения объекта (грунта) при колебаниях выполнен по формуле

$$A_{уст} = \frac{\beta \cdot 2V_c}{f_c}, \quad (1)$$

где  $A_{уст}$  – истинное перемещение, мм;  $\beta$  – коэффициент ослабления, устанавливаемый на канале мобильной станции (безразмерный);  $2V_c$  – амплитуда сигнала от максимума до минимума (двойная амплитуда среднего значения сигнала, рассчитанная программой), В;  $f_c$  – коэффициент чувствительности канала, В/мм.

В табл. 1 приведены коэффициенты усиления каналов, полученных при тарировке МИСС.

Таблица 1

**Коэффициент усиления каналов**

Показатель	1-й канал	2-й канал	3-й канал
Коэффициент усиления, $f_c$	$f_{c1}=422$	$f_{c2}=1021$	$f_{c3}=775$

По формуле (1) определили максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для продольного направления по данным 1-го канала:  $\beta_1=2$ ;  $2V_{c1}=2 \cdot 1.165$  В;  $f_{c1}=422$ :

$$A_{уст1} = \frac{\beta_1 \cdot 2V_{c1}}{f_{c1}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1.165}{422} = 0.02 \text{ мм.} \quad (2)$$

Максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для поперечного направления по данным 2-го канала:  $\beta_2=2$ ;  $2V_{c2}=2 \cdot 1.865$  В;  $f_{c2}=1021$ :

$$A_{уст2} = \frac{\beta_2 \cdot 2V_{c2}}{f_{c2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1.865}{1021} = 0.01 \text{ мм.} \quad (3)$$

Максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для вертикального направления по данным 3-го канала:  $\beta_3=10$ ;  $2V_{c3}=2 \cdot 2.04$  В;  $f_{c3}=775$ :

$$A_{уст3} = \frac{\beta_3 \cdot 2V_{c3}}{f_{c3}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 2.04}{775} = 0.06 \text{ мм.} \quad (4)$$

Полученные результаты приведены в табл. 2.

По данной методике определяется перемещение объекта в миллиметрах от сигнала сейсмометра в вольтах, показанных на мониторе, и от коэффициента ослабления чувствительности канала  $\beta$ , устанавливаемого при измерениях.

По этой методике определим перемещения моста в измерительной точке ИТ-1 при колебаниях, вызванных прохождением гружёного грузового автомобиля «MAN». Графики колебаний моста показаны на рис. 6.

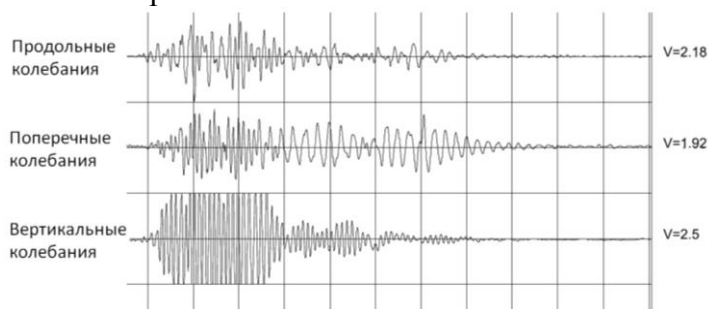


Рис. 6. Регистрация движения грузового автомобиля MAN при  $\beta_1=20, \beta_2=20, \beta_3=50$ . (6-е, изм.)

Максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для продольного направления по данным 1-го канала:  $\beta_1=20; 2V_{c1}=2 \cdot 2.18 \text{ В}; f_{c1}=422$ :

$$A_{uct1} = \frac{\beta_1 \cdot 2V_{c1}}{f_{c1}} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 2.18}{422} = 0.21 \text{ мм.} \quad (5)$$

Максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для поперечного направления по данным 2-го канала:  $\beta_2=20; 2V_{c2}=2 \cdot 1.92 \text{ В}; f_{c2}=1021$ :

$$A_{uct2} = \frac{\beta_2 \cdot 2V_{c2}}{f_{c2}} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1.92}{1021} = 0.08 \text{ мм.} \quad (6)$$

График вертикального колебания сейсмометра вышел за пределы допустимой величины в 2.5 В, сверху и снизу амплитуды сигнала срезаны. Если вместо срезанных сигналов начертить огибающие амплитуды, то получим величину сигнала порядка 3.5 В. Поэтому максимальное перемещение моста в измерительной точке ИТ-1 для вертикального направления по данным 3-го канала:  $\beta_3=50; 2V_{c3}=2 \cdot 3.5 \text{ В}; f_{c3}=775$ :

$$A_{uct3} = \frac{\beta_3 \cdot 2V_{c3}}{f_{c3}} = \frac{50 \cdot 2 \cdot 3.5}{775} = 0.46 \text{ мм.} \quad (7)$$

Таблица 2

**Измерение колебаний моста**

Автомашина	Продольное колебание, мм	Поперечное колебание, мм	Вертикальное колебание, мм
Nexia	0.02	0.01	0.06
MAN	0.21	0.08	0.46

Измерены перемещения (колебания) моста по записям сейсмометров в середине моста (ИТ-2).

Колебания, вызванные движением легкового автомобиля Nexia, зарегистрированные сейсмометрами в измерительной точке ИТ-2 (середина моста), представлены в виде графиков на рис. 7.

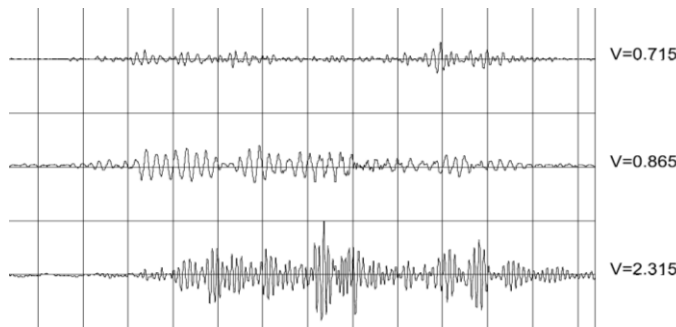


Рис. 7. Регистрация движения легкового автомобиля Nexia при  $\beta_1=20, \beta_2=20, \beta_3=50$  (8-е изм.)

Результаты для продольного направления по данным 1-го канала:  
 $\beta_1=20$ ;  $2V_{c1}=2 \cdot 0.715$  В;  $f_{c1}=422$ .

Результаты для поперечного направления по данным 2-го канала:  
 $\beta_2=20$ ;  $2V_{c2}=2 \cdot 0.865$  В;  $f_{c2}=1021$ .

Результаты для вертикального направления по данным 3-го канала:  
 $\beta_3=50$ ;  $2V_{c3}=2 \cdot 2.315$  В;  $f_{c3}=775$ .

Для нахождения максимальных значений перемещений при колебаниях используются формулы (2), (3) и (4).

Найденные значения перемещений приведены в табл. 3.

Проезд двух порожних грузовых автомобилей Камаз подряд, зарегистрированный сейсмометрами в измерительной точке ИТ-2, представлен в виде графиков на рис. 8.

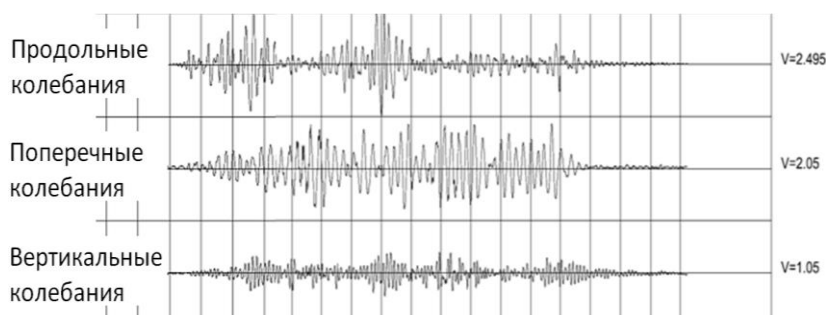


Рис. 8. Регистрация движения двух порожних грузовых автомобилей Камаз при  $\beta_1=20$ ,  $\beta_2=20$ ,  $\beta_3=50$  (9-е изм.)

Результаты для продольного направления по данным 1-го канала:  
 $\beta_1=20$ ;  $2V_{c1}=2 \cdot 2.495$  В;  $f_{c1}=422$ .

Результаты для поперечного направления по данным 2-го канала:  
 $\beta_2=20$ ;  $2V_{c2}=2 \cdot 2.05$  В;  $f_{c2}=1021$ .

Результаты для вертикального направления по данным 3-го канала:  
 $\beta_3=50$ ;  $2V_{c3}=2 \cdot 1.05$  В;  $f_{c3}=775$ .

Максимальные значения перемещений колебаний в ИТ-2, вызванных движением грузовых автомобилей Камаз, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Максимальные значения перемещений

Автомашина	Продольное колебание, мм	Поперечное колебание, мм	Вертикальное колебание, мм
Nexia	0.07	0.04	0.3
Камаз	0.24	0.08	0.14

### Влияние скорости автомобиля на колебание моста.

Измерения колебаний моста проводили в измерительной точке ИТ-3.

Исследовали зависимость колебания моста от скорости проезжающего автомобиля.

Для данных измерений легковой автомобиль Cobalt проехал по мосту два раза с различной скоростью – 20 и 40 км/ч. Регистрация данных сейсмометров при скорости 20 км/ч приведена в виде графиков на рис. 8, а для скорости 40 км/ч – на рис. 9.

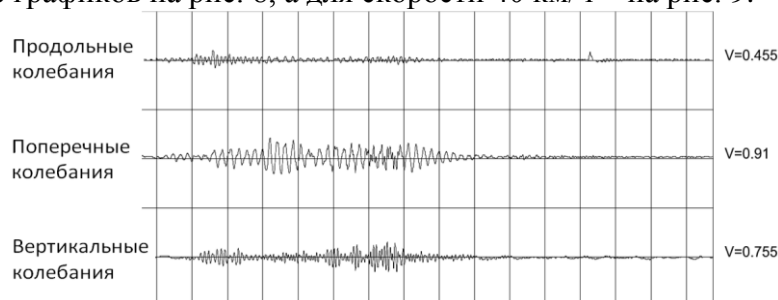


Рис. 9. Регистрация движения легкового автомобиля Cobalt со скоростью 20 км/ч при  $\beta_1=2$ ,  $\beta_2=2$ ,  $\beta_3=20$  (12-е изм.)

По приведенным данным и формулам (2)–(4) определяются максимальные перемещения (табл. 4).

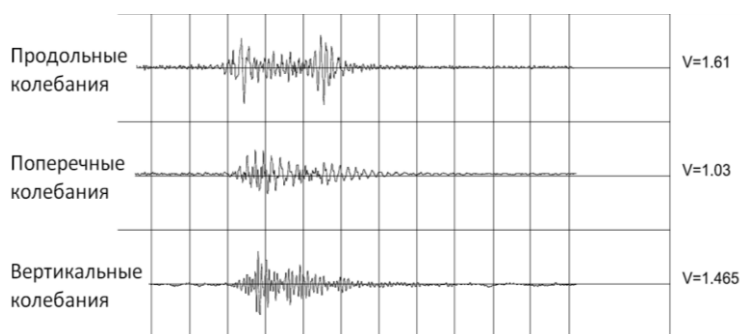


Рис. 10. Регистрация движения легкового автомобиля Cobalt со скоростью 40 км/ч при  $\beta_1=2, \beta_2=2, \beta_3=20$  (12-е изм.)

Максимальные перемещения моста при скорости 20 км/ч в измерительной точке ИТ-3 для:  
 продольного направления –  $\beta_1=2; 2V_{c1}=2 \cdot 0.455 \text{ В}; f_{c1}=422;$   
 поперечного направления –  $\beta_2=2; 2V_{c2}=2 \cdot 0.91 \text{ В}; f_{c2}=1021;$   
 вертикального направления –  $\beta_3=20; 2V_{c3}=2 \cdot 0.755 \text{ В}; f_{c3}=775.$

Максимальные перемещения моста при скорости 40 км/ч в измерительной точке ИТ-3 для:  
 продольного направления –  $\beta_1=2; 2V_{c1}=2 \cdot 1.61 \text{ В}; f_{c1}=422;$   
 поперечного направления –  $\beta_2=2; 2V_{c2}=2 \cdot 1.03 \text{ В}; f_{c2}=1021;$   
 вертикального направления –  $\beta_3=20; 2V_{c3}=2 \cdot 1.465 \text{ В}; f_{c3}=775.$

Таблица 4

Максимальные перемещения моста при 20 и 40 км/ч

Скорость автомашины Cobalt	Продольное колебание, мм	Поперечное колебание, мм	Вертикальное колебание, мм
20 км/ч	0.01	0.01	0.04
40 км/ч	0.02	0.01	0.08

Размещение сейсмометров произведено в измерительных точках ИТ-1, ИТ-2 и ИТ-3.

Для исследования прогиба моста по вертикали при прохождении автотранспорта в каждой измерительной точке установили по одному вертикальному сейсмометру ОСП-3.

На рис. 11 представлены записи колебаний сейсмометров при движении грузовой автомашины ЗИЛ с грузом. Автомашина въехала на мост со стороны, где располагалась измерительная точка ИТ-3. На графиках рис. 11 видно, что первую регистрацию начал сейсмометр, расположенный в ИТ-3. Затем регистрации продолжили сейсмометры в измерительных точках ИТ-2 и ИТ-1.

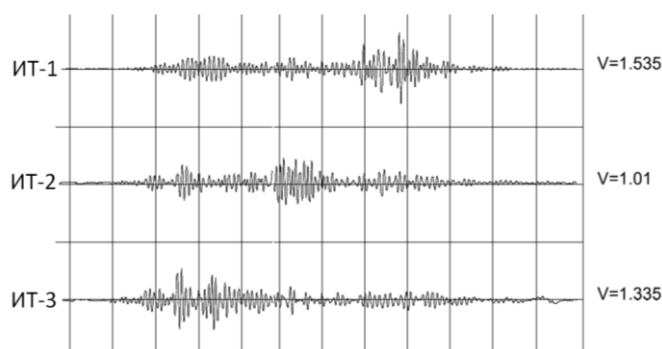


Рис. 11. Регистрация движения гружёного автомобиля ЗИЛ при  $\beta_1=100, \beta_2=100, \beta_3=100$  (13-е изм.)

Наибольшее колебание моста было в ИТ-1, наименьшее – в ИТ-2. Максимальные перемещения моста в вертикальном направлении в измерительных точках по полученным данным помещены в табл. 5:

ИТ-1:  $\beta_1=100; 2V_{c1}=2 \cdot 1.535 \text{ В}; f_{c1}=422;$

ИТ-2:  $\beta_2=100; 2V_{c2}=2 \cdot 1.01 \text{ В}; f_{c2}=1021;$

ИТ-3:  $\beta_3=100; 2V_{c3}=2 \cdot 1.335 \text{ В}; f_{c3}=775.$

Рассмотрим следующий случай, когда на мост с противоположных сторон с интервалом в 5 с въехали две гружёные автомашины Камаз и Краз. Первым по мосту проехал Камаз и только он съехал с моста, как на мост въехал Краз. Камаз въехал на мост со

стороны расположения измерительной точки ИТ-3, затем последовательно проехал ИТ-2 и ИТ-1. На рис. 12 видно, что график в этой точке смещен влево относительно графиков в ИТ-2 и ИТ-1. Краз въехал на мост со стороны расположения измерительной точки ИТ-1, затем последовательно проехал ИТ-2 и ИТ-3, что видно по смещению графиков. График в ИТ-1 смещен влево относительно графиков в ИТ-2 и ИТ-3.

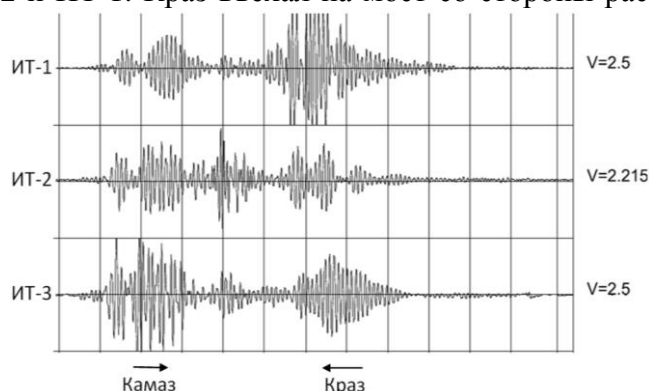


Рис. 12. Регистрация движения гружёных автомобилей Камаз и Краз при  $\beta_1=100$ ,  $\beta_2=100$ ,  $\beta_3=100$  (15-е изм.)

Максимальное колебание моста при проезде автомашины Краз в измерительной точке ИТ-1 при максимальном ослаблении усиления канала  $\beta_1=100$  «срезало» амплитуду сигнала сейсмометра примерно на 0.5 вольта. С учетом этого момента данные от нагрузки

двух автомашин на мост имеют следующий вид:

ИТ-1:  $\beta_1=100$ ;  $2V_{c1}=2 \cdot 3$  В;  $f_{c1}=422$ ;

ИТ-2:  $\beta_2=100$ ;  $2V_{c2}=2 \cdot 2.215$  В;  $f_{c2}=1021$ ;

ИТ-3:  $\beta_3=100$ ;  $2V_{c3}=2 \cdot 2.5$  В;  $f_{c3}=775$ .

Определим максимальные перемещения по формулам (2)–(4) и приведем в табл. 5.

Таблица 5

Максимальные колебания моста

Автомашина	ИТ-1, мм	ИТ-2, мм	ИТ-3, мм
ЗИЛ	0.73	0.2	0.35
Камаз, Краз	1.43	0.44	0.65

Вычислены значения смещений в миллиметрах по данным, полученным сейсмометрами в измерительных точках ИТ-1, ИТ-2, ИТ-3 при колебаниях моста, вызванных движением автотранспорта различной грузоподъемности. Соотнесем вычисленные значения смещения в миллиметрах с инструментальными данными сейсмической шкалы MSK-64, в которой приводятся параметры колебания грунта на поверхности земли в зависимости от интенсивности землетрясения в баллах (табл. 6).

Таблица 6

Динамическая нагрузка на мост от движения автомобилей

№	Автомашина	ИТ-1		ИТ-2		ИТ-3	
		Продольное перемещение, мм	Баллы	Поперечное перемещение, мм	Баллы	Вертикальное перемещение, мм	Баллы
ИТ-1							
1	Nexia	0.02	<1	0.01	<1	0.06	1
2	MAN	0.21	3	0.08	1	0.46	4
ИТ-2							
3	Nexia	0.07	1	0.04	<1	0.3	3
4	Камазы	0.24	3	0.08	1	0.14	2
ИТ-3							
5	Cobalt 20 км/ч	0.01	<1	0.01	<1	0.04	<1
6	Cobalt 40 км/ч	0.02	<1	0.01	<1	0.08	1
Вертикальные перемещения							
		ИТ-1		ИТ-2		ИТ-3	
7	ЗИЛ	0.73	4	0.2	2÷3	0.35	3
8	Камаз, Краз	1.43	5	0.44	4	0.65	4

**Заключение.** Полученные результаты показывают (см. табл. 6), что движение легковых автомобилей оказывает незначительную динамическую нагрузку на мост, смещение не

превышает 0.1 мм за исключением движения автомобиля Nexia в ИТ-3 (№3), который на большой скорости въехал в небольшое углубление на поверхности дорожного покрытия моста. Чем больше скорость автомашины, тем больше динамическая нагрузка на мост (№ 5, 6). Максимальную динамическую нагрузку на мостовое сооружение оказывают гружённые грузовые машины, такие как Камаз, Краз или ЗИЛ (№ 7, 8). При движении гружённых автомашин смещение в измерительных точках доходило до 0.75 мм, что соответствует 4-балльному землетрясению. В ИТ-1 смещение достигло 1.43 мм, что соответствует 5-балльному землетрясению.

Как видно из табл. 6, величина смещений в измерительной точке ИТ-2 меньше, чем в измерительных точках ИТ-1 и ИТ-3, что обусловлено конструкцией моста.

Данный метод диагностики моста с помощью мобильного комплекса МИСС вполне работоспособен и может применяться для решения задач, связанных с исследованиями мостовых сооружений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Liu X. Global Monitoring System on Lantau Fixed Crossing in Hong Kong, IABSE Symposium San Francisco, 1995.
- [2] Сергеев А.А., Андронов А.А. Методы учета динамических воздействий подвижной нагрузки на пролетные строения мостов // Научные труды ОАО ЦНИИС. Вып. 230. М., 2006. С. 21–25.
- [3] Яшинов А.Н., Снежков И.И. Опыт диагностики искусственных сооружений методом малых воздействий // Интернет-журнал «Транспортные сооружения». 2019. №3. Т. 6.
- [4] Бондар И.С. Вибродиагностика балочных пролетных строений железнодорожных мостов: Дис. ... канд. техн. наук. М., 2019. С. 146.
- [5] Архипенко Ю.В. Методика расчета динамического воздействия подвижных нагрузок с мостами с применением программных комплексов конечно-элементного анализа: Дис. ... канд. техн. наук. М.: ОАО ЦНИИС, 2006. С. 176.
- [6] Бондар Н.Г. Измерение деформаций балочных пролетных строений мостов // Мир транспорта. М: МИИТ, 2016. №6(67). С. 36–51.
- [7] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: 1967. С. 162.
- [8] Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975. С. 706.
- [9] Быстров В.А. Методика количественной оценки остаточного ресурса от воздействия обрабатываемых нагрузок // Сб. докл. МНПК. Спб.: Изд-во СПбГАСУ, 2005. Ч. II. С.21–28.
- [10] Васильев А. И. Основы надежности транспортных сооружений. Уч. пос. М.: МАДИ. – 46 с.
- [11] Звягинцев А.Н. Динамическая диагностика автодорожных мостов и других инженерных сооружений. Методическая инструкция МН 30. М.: ОАО ЦНИИС, 2003. С. 21.
- [12] Картопольцев А.В. Совершенствование метода оценки динамических характеристик пролетных строений балочных автодорожных мостов: Дис. ... канд. техн. наук. Томск, 1998. С. 153.
- [13] Новак Ю.В., Звягинцев А. Н., Павлов Е.И. Оценка технического состояния железобетонных мостов методами динамической диагностики // Научные труды ОАО ЦНИИС. Вып. 234. М., 2006. С. 29–36.
- [14] Соломенцев М.Е. Методика динамической диагностики типовых балочных железобетонных пролетных строений автодорожных мостов: Дис ... канд. техн. наук. М., 2011. С. 143.
- [15] Яшинов А.Н., Слюсарь А.В. Совершенствование методики диагностики железобетонных пролетных строений по результатам исследования их динамической работы // Общество железобетонщиков Сибири и Урала. Научные труды. – Вып. 8. Новосибирск, 2005. С. 83–85.
- [16] Хазанов М.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния мостовых конструкций с использованием компьютерной измерительной системы: Дис ... канд. техн. наук. М., 2007. –130 с.
- [17] Айдаралиев А.Е. Регулирование усилий в балках при динамических воздействиях с изменением геометрической схемы расчета сооружений (на примере балочного моста). Дис ... канд. техн. наук. Бишкек, 2011. – 134 с.
- [18] Гриднев С.Ю. Развитие теории динамического расчета автодорожных мостов на подвижную нагрузку. Дис .... канд. техн. наук. Воронеж, 2013. – 370 с.
- [19] Сергеев А.А. Методика экспериментальной оценки динамических воздействий подвижной нагрузки на пролетные строения автодорожных мостов. Дис ... канд. техн. наук. М., 2007. С. 197.
- [20] Aktan AE., Nacati Catbas F. Modal analysis for damage identification: past experiences and Swiss Z-24 bridge. In: Proceedings of 20th International Modal Analysis Conference. 2002. P. 448–456.
- [21] Law S.S., Zhu X.Q. Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads // Engineering Structures, Hong Kong, China. 2004. №26. P.1279–1293.
- [22] Отчет (промежуточный, шифр: ФА-А14-Ф021) о научно-исследовательской работе по теме: «Совершенствование методики экспериментальных исследований сейсмостойкости сооружений путем модернизации лабораторно-экспериментального оборудования и определение закономерностей деформирования конструкции при действии статических и динамических нагрузок», 2016.

Дата поступления  
06.10.2022

**Бердибаев М.Ж., Галиаскаров В.А., Нишоннов Н.А., Рахимжонов З.К. Автомобил кўприklarининг тўсинли темирбетон оралиқ қурилмаларини вибродиагностика услуги**

**Аннотация:** Мақолада автотранспорт воситаларининг ҳаракатланишидан автомобил йўлларидаги темирбетон кўприklarининг тебраниш шакллари ва частоталари бўйича экспериментал маълумотлар келтирилган. Ушбу тадқиқотлар кейинчалик кўприк иншоотларини лойиҳаlashида, шунингдек, автойўл кўприklarини конструкцияларидаги нуқсонларни аниқlashида қўлланилиши мумкин. Ушбу мақола замонавий ўлчаш асбоблари, компьютер ва дастурлардан фойдаланган ҳолда кўприк конструкцияларининг динамик хусусиятларини ўлчаш усулларини такомиллаштиришига қаратилган. Ушбу муаммони ҳал қилиш иншоотнинг юк кўтариши қобилиятини камайтирадиган нуқсонларни тезда аниқlashи учун автойўл кўприklarининг тўсинли оралиқ қурилмаларида вибродиагностика усулларини такомиллаштиришини ўз ичига олади. Ушбу усул эксплуатация қилинаётган автойўл кўприklarидаги тўсинли оралиқ қурилмаларнинг техник ҳолатини баҳолаш ва уларнинг юк кўтариши қобилиятини аниқlashи имконин беради.

**Калим сўзлар:** автойўл кўприги; оралиқ қурилма; ҳаракатланувчи юк; тўсин; сейсмометр; тебраниш.

**Berdibaev M.J., Galiaskarov V.A., Nishonov N.A., Rakhimjonov Z.K. Vibrodiagnostics technique for typical girder reinforced concrete spans of road bridges**

**Abstract:** The article presents experimental data on the modes and frequencies of natural oscillations of reinforced concrete road bridges under constant loads and rolling stock exit from the span. These studies can later be used in the design of bridge structures, as well as to identify defects in structural elements of road bridges. This article is aimed at improving the methods for measuring the dynamic characteristics of bridge structures based on the use of modern measuring instruments, personal computers and software. The solution to this problem includes the improvement of methods for vibrodiagnostics of girder spans of railway bridges in order to promptly identify defects that reduce the bearing capacity of the structure. These techniques will make it possible to assess the technical condition of the operated girder spans of railway bridges and to specify their bearing capacity.

**Keywords:** road bridge; superstructure; moving load; girder; seismometer; oscillations.

УДК 539:386

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГРУНТОВ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА В ОДНОМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

**Рихсиева Б.Б.**

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан*  
E-mail: barno.khusanova@mail.ru

**Аннотация:** Численно моделирован процесс сдвигового взаимодействия подземного трубопровода с грунтом в одномерной постановке. Основное внимание уделено поведению грунта вокруг трубопровода, в связи с чем пренебрегаем деформационными характеристиками трубопровода. Разработана методика численного решения одномерной задачи о поведении грунтов и распространении волн сдвига с использованием метода конечных разностей. Установлено, что разработанный метод численного исследования позволяет учитывать нелинейные свойства деформирования грунтов. Данный метод апробирован для упругого и вязкоупругого моделирования грунтов. Получены численные результаты распространения волн сдвига в упругом и вязкоупругом грунте при продольном движении подземного трубопровода. Полученные результаты показали затухание параметров волн с расстоянием от поперечного сечения подземного трубопровода. Затухание волн с расстоянием обосновано рассеиванием энергии деформирования на расширяющийся цилиндрический слой грунта. Обосновано, что в случае вязкоупругого грунта также наблюдается затухание по времени в фиксированных точках грунта. Показано, что максимальные касательные напряжения достигаются вблизи контактной поверхности подземного трубопровода и на этом участке происходит интенсивное уменьшение амплитуды касательного напряжения.

**Ключевые слова:** грунты; волны сдвига; сдвиговое взаимодействие; упругость; вязкоупругость; касательное напряжение; деформация сдвига.

**Введение.** В области строительства, бурения нефтяных и газовых месторождений возникают проблемы извлечения свай, подземных трубопроводов или бурильных колонн из грунта. Эти проблемы в некоторых случаях решаются путем уменьшения сил взаимодействия и сцепления между грунтом и этими объектами (сваи, трубопроводы, бурильные колонны) с помощью поступательного движения последних. В этом случае на границе взаимодействия появляются сдвиговые напряжения и деформации, и в грунте распространяются сдвиговые волны. Природа распространения цилиндрических волн может влиять на другие объекты, находящиеся в грунте. Поэтому исследование распространения сдвиговых волн в грунте можно считать одной из актуальных проблем динамики грунтов. Кроме того, сейсмостойкость подземных трубопроводов во многом зависит от напряженного состояния грунта и силы взаимодействия, возникающей при движении трубопровода относительно грунта [1–5]. Следовательно, напряженное состояние грунта вокруг подземного трубопровода также необходимо для оценки прочности подземного трубопровода.



Распространение цилиндрических волн в различных средах рассмотрено в работах [5–9] с использованием метода характеристик и конечных разностей для упругих и упруго-пластических сред [6–7]. В [8–11] изучена природа распространения волн в двумерной постановке. Из решения этих задач было определено, что напряжение и деформация, а также амплитуда скоростей, возникающих за фронтом волны при распространении волны в упругих средах, сохраняют профиль волны и не наблюдается затухания волны. Поглощение продольных волн происходит при учете вязких свойств среды [5, 10–12]. В случае учета вязких свойств уменьшаются значения амплитуды волн относительно расстояния и по времени, максимальные значения напряжения и деформации достигаются в разное время за счет реологических свойств деформирования. При исследовании распространения цилиндрической волны в грунтах [5–7, 11–12], когда задается ударная нагрузка, характеристические линии являются прямыми, а фронт ударным, и параметры волны имеют разрыв. Поэтому, когда задаются такие условия на границе, решение задач методом характеристик является наиболее удобным. Если на границах задается произвольная нагрузка, то гораздо сложнее построить решения на характеристических линиях. В случае учета нелинейных свойств грунта построить решения на характеристической области также доставляет трудность, порой даже при учете структурных изменений или разрушений грунта невозможно получить решения.

Настоящая статья посвящена исследованию распространения одномерных цилиндрических волн в грунтах при движении абсолютно твердого цилиндрического подземного трубопровода в направлении оси симметрии. Она является продолжением исследований, приведенных в [13], где рассмотрено распространение угловых сдвиговых волн, возникающих при вращательном движении подземного трубопровода. Целью данной работы является разработка методики решения, позволяющей применить произвольные нагрузки на границе и сложные свойства деформирования, а также определение параметров распространяющихся цилиндрических волн сдвига в упругом и вязкоупругом грунте.

**Постановка задачи.** Предположим, что в безграничном грунте находится достаточно протяженный и жестко закрепленный подземный трубопровод с внешним радиусом  $r=r_0$ . Пусть в начальный момент времени подземный трубопровод начинает поступательное движение по направлению оси симметрии, при этом деформацией трубопровода пренебрегаем, т.е. считаем его абсолютно недеформируемым. В этом случае в грунте начинают распространяться сдвиговые цилиндрические волны, параметры этих волн являются осесимметричными относительно оси трубопровода, и они зависят только от радиальной координаты и времени, т.е. задача является одномерной. Следовательно, рассмотрим одномерную задачу в цилиндрической системе координат. Уравнение движения грунта при отсутствии массовых сил в эйлеровом представлении имеет вид

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиальная координата;  $v_z=v_z(r,t)$  – скорость частиц грунта по цилиндрической координате  $z$ ;  $\tau_{zr}=\tau_{zr}(r,t)$  – сдвиговое напряжение грунта по радиальной координате. Для решения уравнения (1), где неизвестными являются  $v_z=v_z(r,t)$  и  $\tau_{zr}=\tau_{zr}(r,t)$ , добавим соотношение Коши в виде

$$\dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (2)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, в (1)–(2) необходимо добавить уравнение состояния. Уравнение состояния запишем в общем виде

$$\tau_{zr} = F(\varepsilon_{zr}, \dot{\varepsilon}_{zr}, \dots), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{zr}=\varepsilon_{zr}(r,t)$  – деформация сдвига;  $\dot{\varepsilon}_{zr} = \dot{\varepsilon}_{zr}(r,t)$  – скорость деформации сдвига.

Таким образом, замкнутая система уравнений состоит из уравнений (1)–(3) относительно неизвестных  $v_z=v_z(r,t)$ ,  $\tau_{zr}=\tau_{zr}(r,t)$  и  $\varepsilon_{zr}=\varepsilon_{zr}(r,t)$ . Для решения этой системы уравнения принимаем следующие начальные условия:

$$\text{при } t=0, r>r_0: v_z(r,0)=0 \text{ или } \tau_{zr}(r,0)=0, \varepsilon_{zr}(r,0)=0 \quad (4)$$

и граничные условия:

$$\text{при } r=r_0, t \geq 0: v_z(r_0,t)=v_0(t), \tau_{zr}(r_0,t)=\tau_0(t), u_z(r_0,t)=u_0(t), \quad (5)$$

где  $u_0(t)$  и  $v_0(t)$  – перемещение и скорость подземного трубопровода в направлении оси протяженности ( $Oz$ ).

Поставленную задачу решаем методом конечных разностей с использованием схем [13–14]. Выбор численного метода решения задачи обусловлен тем, что в перспективе для задачи взаимодействия подземного трубопровода появилась бы возможность учета в уравнении состояния грунта сложных свойств деформирования, таких как структурное разрушение, водонасыщенность, вязкопластичность и др. [13].

**Метод решения задачи.** Воспользуемся конечно-разностной схемой [14] и составим конечно-разностные соотношения для поставленной задачи. Безграничный грунт считаем ограниченным радиусом  $r=R$ . Тогда, учитывая скорость распространения  $c_s$  сдвиговых волн, решение рассматриваемой задачи получим до достижения фронта передней волны границы  $r=R$ , т.е. получим численное решение до момента времени  $t \leq (R-r_0)/c_s$ . Радиальный отрезок  $R-r_0$  делим на  $N$  бесконечно малых частей, т.е. цилиндрических ячеек.

Вводим следующие обозначения. Значения скоростей частиц на узловых точках ячеек  $r=r_k > r_0$  в момент времени  $t=t_{n+1/2}$  обозначим через  $v_z(r_k, t_{n+1/2}) = (v_z)_k^{n+1/2}$ . Значения касательных напряжений и сдвиговых деформаций, определенные в центрах ячеек  $r=r_{k+1/2} > r_0$  в момент времени  $t=t_n$ , обозначим через  $\tau_{zr}(r_{k+1/2}, t_n) = (\tau_{zr})_{k+1/2}^n$  и  $\varepsilon_{zr}(r_{k+1/2}, t_n) = (\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^n$ . Ввод параметров, таким образом, обеспечивает второй порядок точности конечно-разностных соотношений [14].

Предположим, что до определенного момента времени  $t=t_n$  известны значения всех параметров задачи. Находим те же параметры на следующих шагах времени. Используя конечно-разностную схему [14], из уравнения (1), определим скорости частиц для момента времени  $t=t_{n+1/2}$  на узловых точках цилиндрической ячейки следующим образом:

$$(v_z)_k^{n+1/2} = (v_z)_k^{n-1/2} + \frac{\Delta t^n}{\varphi_k^n} \{(\tau_{zr})_{k+1/2}^n - (\tau_{zr})_{k-1/2}^n\} + \Delta t^n \alpha_k^n, \quad (6)$$

где  $\Delta t^n$  – шаг по времени;

$$\varphi_k^n = \frac{1}{2} (\rho_{k+1/2}^0 (r_{k+1}^n - r_k^n) + \rho_{k-1/2}^0 (r_k^n - r_{k-1}^n));$$

$$\alpha_k^n = \frac{1}{2} \left( \frac{(\tau_{zr})_{k+1/2}^n}{\frac{1}{2} \rho_{k+1/2}^0 (r_{k+1}^n - r_k^n)} + \frac{(\tau_{zr})_{k-1/2}^n}{\frac{1}{2} \rho_{k-1/2}^0 (r_k^n - r_{k-1}^n)} \right),$$

Если на границе  $r=r_0$  при  $t \geq 0$  заданы скорости частиц (5), то при  $r_k=r_0$ , т.е. при  $k=0$ , вместо соотношения (6) воспользуемся заданием скорости на границе:

$$(v_z)_0^{n+1/2} = v_0(t_{n+1/2}),$$

в случае задания на границе касательного напряжения (5) соотношение (6) при  $k=0$  имеет вид

$$(v_z)_0^{n+1/2} = (v_z)_0^{n-1/2} + \frac{\Delta t^n}{\varphi_0^n} \{(\tau_{zr})_{0+1/2}^n - \tau_0(t_n)\} + \Delta t^n \alpha_0^n;$$

$$\varphi_0^n = \frac{1}{2} \rho_{0+1/2}^0 (r_1^n - r_0^n), \quad \alpha_0^n = \frac{(\tau_{zr})_{0+1/2}^n}{\frac{1}{2} \rho_{0+1/2}^0 (r_1^n - r_0^n)}.$$

В случае задания продольного смещения подземного трубопровода (5) скорости частиц на границе определяются по формуле

$$(v_z)_0^{n+1/2} = \frac{u_z(t_{n+1}) - u_z(t_n)}{\Delta t^{n+1/2}}.$$

Итак, мы нашли все значения скорости  $v_z(r_k, t_{n+1/2}) = (v_z)_k^{n+1/2}$  на узловых точках в момент времени  $t=t_{n+1/2}$ . Теперь перемещение частиц грунта на узловых точках в момент времени  $t=t_{n+1}$  определим по формуле

$$(u_z)_k^{n+1} = (u_z)_k^n + (v_z)_k^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}. \quad (7)$$

Сдвиговая деформация вычисляется с помощью конечно-разностного соотношения

$$(\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^{n+1} = (\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^n + (\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}, \quad (8)$$

где скорость деформации из (2) находим по формуле

$$(\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2} = \frac{(v_z)_{k+1}^{n+1/2} - (v_z)_k^{n+1/2}}{r_{k+1}^{n+1/2} - r_k^{n+1/2}}, \quad r_k^{n+1/2} = \frac{1}{2}(r_k^{n+1} + r_k^n). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) нам теперь известны значения сдвиговой деформации и ее скорости, определенные в центре цилиндрической ячейки в моменты времени  $t=t_{n+1}$  и  $t=t_{n+1/2}$ .

Значения касательных напряжений в центрах цилиндрических ячеек можно вычислить по принятой модели деформирования. В общем случае (3) формула определения касательных напряжений имеет вид

$$(\tau_{zr})_{k+1/2}^{n+1} = F((\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^{n+1}, (\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2}, q_{k+1/2}^{n+1/2}, \dots). \quad (10)$$

Здесь при определении касательных напряжений (10) были добавлены псевдовязкие члены  $q_{k+1/2}^{n+1/2}$ , чтобы произвести сквозной расчет на фронте волн, т.е. привести к непрерывным решениям, а также и сгладить осцилляции численного решения [13–14]:

$$q_{k+1/2}^{n+1/2} = C_0^2 \rho_{k+1/2}^0 \left( (v_\varphi)_{k+1}^{n+1/2} - (v_\varphi)_k^{n+1/2} \right),$$

где  $C_0 = \text{const} = 2$ .

Шаг по времени, удовлетворяя условиям устойчивости разностной схемы, выбирается в следующем виде [14]:

$$\Delta t^{n+3/2} = \frac{1}{3} \frac{r_{k+1}^{n+1} - r_k^{n+1}}{c_s} \Big|_{\min \text{ по } k}. \quad (11)$$

В процессе расчета возможно увеличение шага по времени. При этом мы ограничиваем увеличение шага не более чем на 10%, т.е. если  $\Delta t^{n+3/2} > 1.1 \Delta t^{n+1/2}$ , то принимаем  $\Delta t^{n+3/2} = 1.1 \Delta t^{n+1/2}$ . Как только шаг  $\Delta t^{n+3/2}$  определен по формуле (11), можем определить шаг по времени  $t^{n+1}$  следующим образом:

$$\Delta t^{n+1} = \frac{1}{2} (\Delta t^{n+3/2} + \Delta t^{n+1/2}).$$

Итак, соблюдая условия устойчивости (11) и используя значения скорости, деформации и напряжений в предыдущие моменты времени, мы определили значения этих параметров для следующего момента времени (6)–(10). Выполняя эти действия последовательным способом, можно определить параметры сдвиговой волны, распространяющейся в окружающем грунте до момента времени  $t \leq (R-r_0)/c_s$ . В этом состоит суть численного решения поставленной задачи. Если потребуется увеличение времени распространения волны, то мы должны увеличить размер рассматриваемой области искомых решений, т.е.  $r=R$ .

**Численные результаты и их анализ.** По алгоритму численного решения задачи составлена программа. С использованием этой программы получены решения при следующих исходных данных: начальная плотность грунта  $\rho^0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup>; скорости распространения продольных и поперечных волн  $c_p = 2000$  м/с и  $c_s = 1000$  м/с; внешний радиус подземного трубопровода  $r_0 = 1$  м. Сначала рассмотрим распространение упругих волн сдвига.

### 1. Упругие сдвиговые волны

Если грунт моделируется упругим законом деформирования, то конкретный вид этого закона при сдвиге имеет вид  $\tau_{rz} = \tau_* + G(\varepsilon_{rz} - \varepsilon_*)$  или  $\dot{\tau}_{rz} = G\dot{\varepsilon}_{rz}$ , где  $\tau_*, \varepsilon_*$  – опорные значения касательного напряжения и сдвиговой деформации для начала деформирования. В этом случае соотношение (10) имеет вид

$$(\tau_{rz})_{k+1/2}^{n+1} = (\tau_{rz})_{k+1/2}^n + G(\dot{\varepsilon}_{rz})_{k+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} + q_{k+1/2}^{n+1/2}.$$

На рис.1 представлены изменения скорости частиц (а) и касательное напряжение (б) в фиксированных цилиндрических слоях грунта в зависимости от времени. Кривые 1–5 соответствуют сечениям  $r=1.1, 2, 3, 4$  и  $6$  м. Здесь на границе заданы скорости частиц (5), т.е. скорость движения подземного трубопровода в виде  $v_0(t) = v_{\max} \sin(\omega t)$ , где  $v_{\max} = 0.1$  м/с,  $\omega$  – частота движения трубопровода. При этом  $\omega = 50\pi$  рад/с.

Как видно из рис.1, в случае задания касательной скорости на границе  $r=r_0$  амплитуда значений скорости частиц и касательного напряжения уменьшается с расстоянием. Затухание амплитуды происходит при первом вступлении волны, далее в фиксированных сечениях уменьшение по времени не наблюдается. При положительном значении скорости частиц значение касательного напряжения возрастает по модулю. В случае обратного движения, т.е. при отрицательном значении скорости частиц, касательное напряжение уменьшается и происходит разгрузка напряженного состояния. Отметим, что аналогичные уменьшения скорости частиц и касательного напряжения наблюдались при вращательном движении подземного трубопровода в [13]. Таким образом, при упругом деформировании грунта сдвиговая волна затухает с расстоянием. Рассеивание энергии происходит из-за её перераспределения на расширяющемся цилиндрическом слое, как было указано в [13].

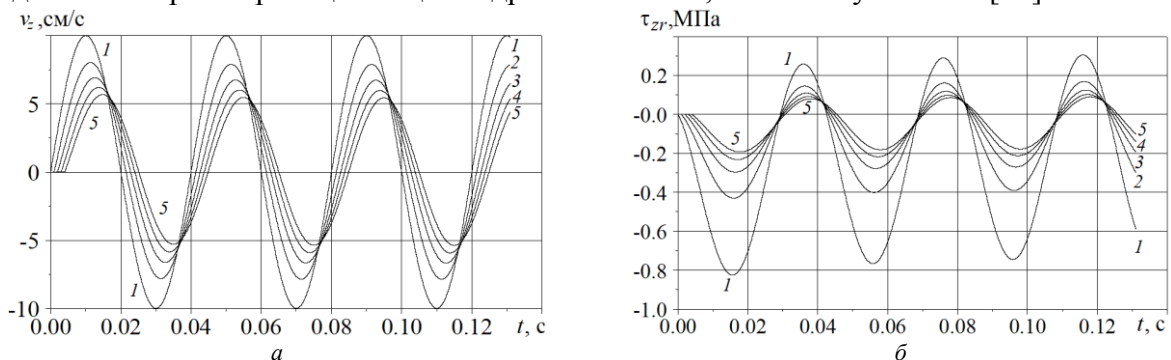


Рис. 1. Изменение скорости частиц (а) и касательного напряжения (б) грунта по времени: 1– $r=1.1$  м; 2– $r=2$  м; 3– $r=3$  м; 4– $r=4$  м; 5– $r=6$  м

## 2. Вязкоупругие сдвиговые волны

При учете вязкостных характеристик грунта можно применять различные вязкоупругие модели деформирования. В случае применения модели Кельвина–Фойгта

$$\tau_{zr} = G\varepsilon_{zr} + \eta\dot{\varepsilon}_{zr},$$

или модели Максвелла

$$\frac{d\tau_{zr}}{Gdt} + \frac{\tau_{zr}}{\eta} = \dot{\varepsilon}_{zr}$$

конечно-разностные соотношения (10) принимают вид

$$(\tau_{zr})_{k+1/2}^{n+1} = G(\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^{n+1} + \eta(\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2} + q_{k+1/2}^{n+1/2}$$

$$\text{или } (\tau_{zr})_{k+1/2}^{n+1} = \frac{\eta}{\eta + G\Delta t^{n+1/2}} \left( (\tau_{zr})_{k+1/2}^n + G(\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \right) + q_{k+1/2}^{n+1/2}.$$

Если грунт моделируется в виде стандартно-линейного тела, объединяя две предыдущие модели деформирования

$$\frac{d\tau_{zr}}{G_D dt} + \mu \frac{\tau_{zr}}{G_S} = \frac{d\varepsilon_{zr}}{dt} + \mu \varepsilon_{zr},$$

то конечно-разностное соотношение для этой модели имеет вид

$$(\tau_{zr})_{k+1/2}^{n+1} = \frac{(\tau_{zr})_{k+1/2}^n + G_D (\dot{\varepsilon}_{zr})_{k+1/2}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} + \mu G_D (\varepsilon_{zr})_{k+1/2}^{n+1} \Delta t^{n+1/2}}{1 + \mu G_D \Delta t^{n+1/2} / G_S} + q_{k+1/2}^{n+1/2}.$$

На рис. 2 представлены изменения скорости частиц и касательного напряжения грунта по времени в случае применения модели стандартно-линейного тела. Здесь дополнительно приняты следующие данные: динамический модуль сдвига  $G_D = c_s^2 \rho^0$ , статический модуль  $G_S = G_D/2$ , параметр, характеризующий вязкость грунта –  $\mu = 100 \text{ с}^{-1}$ . Кривые 1–5 соответствуют сечениям  $r = 1.1, 2, 3, 4$  и  $6 \text{ м}$ . Как видно из рис.2, амплитуда скорости частиц грунта с удалением от контактной поверхности трубопровода уменьшается, наблюдается также незначительное затухание по времени. Аналогичная картина уменьшения по расстоянию и затухания со временем наблюдается для касательного напряжения. Значительные уменьшения происходят вблизи контакта с трубопроводом при первом вступлении волны, почти на 25% снижается амплитуда по сравнению с амплитудой касательного напряжения в упругом грунте.

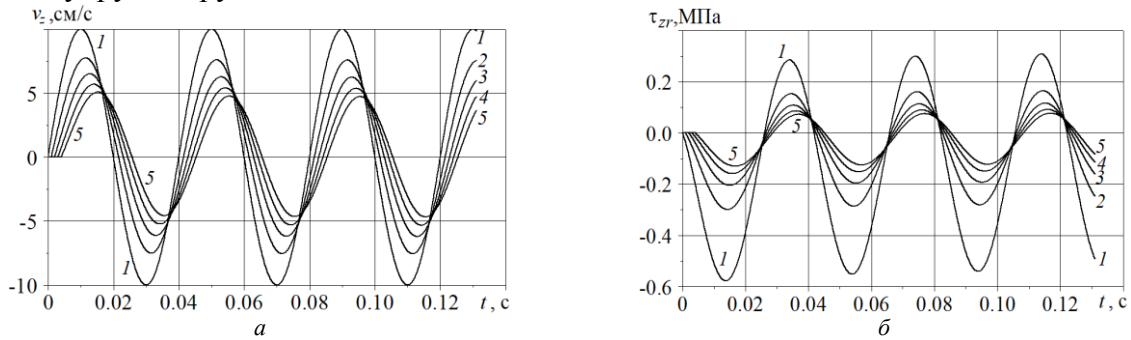


Рис. 2. Изменение скорости частиц (а) и касательного напряжения (б) грунта по времени:  
1– $r=1.1 \text{ м}$ ; 2– $r=2 \text{ м}$ ; 3– $r=3 \text{ м}$ ; 4– $r=4 \text{ м}$ ; 5– $r=6 \text{ м}$

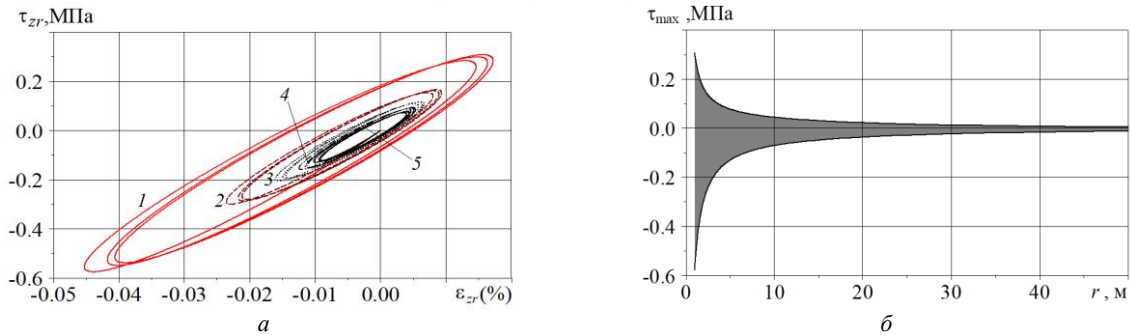


Рис. 3. Зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации:  
1– $r=1.1 \text{ м}$ ; 2– $r=2 \text{ м}$ ; 3– $r=3 \text{ м}$ ; 4– $r=4 \text{ м}$ ; 5– $r=6 \text{ м}$

Рис. 4. Распределение максимальных касательных

На рис.3 приведена диаграмма касательного напряжения – деформации сдвига, полученная при решении задач в тех же фиксированных точках грунта 1–5, что и на рис.2. Как видно из рис.3, диаграмма «касательное напряжение – деформация сдвига» в данном случае описывает нелинейное деформирование грунта вокруг подземного трубопровода и «петли гистерезиса» (площадь, ограниченная кривыми нагружения и разгрузки), что указывает на рассеивание энергии за каждый цикл деформирования. Наибольшая потеря энергии деформирования происходит в грунте вблизи подземного трубопровода. На рис. 4 показано распределение максимальных значений по модулю касательного напряжения с расстоянием.

Отсюда видна интенсивность уменьшения амплитуды касательного напряжения в зависимости от радиуса и максимальные касательные напряжения достигаются вблизи контактной поверхности подземного трубопровода.

Результаты, аналогичные рис. 2–4, приведены на рис. 5–7 при  $\omega=30\pi$ , т.е. для увеличенного периода гармонического движения трубопровода.

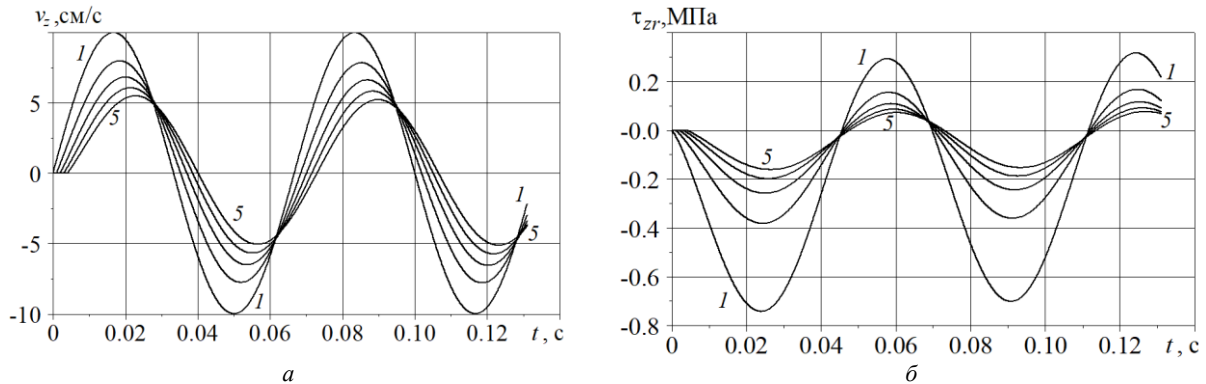


Рис. 5. Изменение скорости частиц (а) и касательного напряжения (б) грунта по времени:  
1- $r=1.1$  м; 2- $r=2$  м; 3- $r=3$  м; 4- $r=4$  м; 5- $r=6$  м

Уменьшение частоты скорости подземного трубопровода практически не влияет на частоту скорости частиц грунта и незначительно уменьшает интенсивность затухания амплитуды с расстоянием (рис.5,а). При этом увеличиваются амплитуды значений касательного напряжения (рис.5,б) по сравнению с зависимостью, показанной на рис.2,б. Увеличение периода движения трубопровода также приводит к увеличению потери энергии за каждый цикл деформирования (см. рис.6).

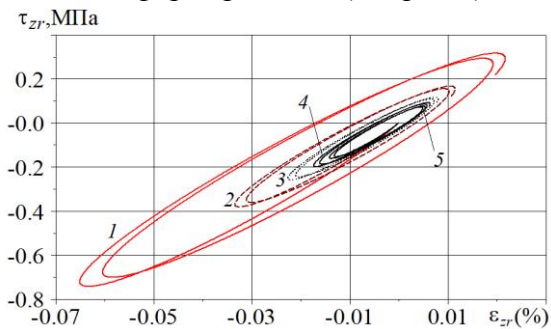


Рис. 6. Зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации:  
1- $r=1.1$  м; 2- $r=2$  м; 3- $r=3$  м; 4- $r=4$  м; 5- $r=6$  м

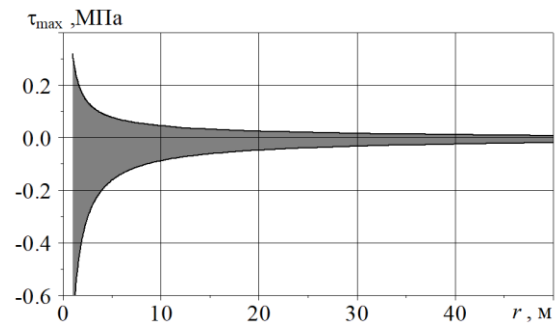


Рис. 7. Распределение максимальных касательных напряжений по радиусу

На рис.7 приведено распределение максимальных значений по модулю касательного напряжения, достигающих экстремума в процессе рассмотренного промежутка времени, с расстоянием от поперечного сечения трубопровода. Здесь также можно проследить, что максимальные касательные напряжения достигаются вблизи контактной поверхности подземного трубопровода и на этом участке происходит интенсивное уменьшение амплитуды касательного напряжения.

**Заключение.** Поставлена одномерная задача о поведении грунтов и распространении волн сдвига в процессе сдвигового взаимодействия подземного трубопровода с грунтом. Разработана численная методика решения поставленной задачи с использованием метода конечных разностей с центральной разностной схемой. Разработанный метод численного исследования позволяет учитывать нелинейные свойства деформирования грунтов. Он апробирован для упругого и вязкоупругого моделирования грунтов. Получены численные результаты о распространении сдвиговых волн в упругой и вязкоупругой грунтовой среде. Составленный алгоритм реализован на ПЭВМ с помощью Java. Результаты представлены в виде графиков. Полученные результаты показали затухание параметров волн с расстоянием от поперечного сечения подземного трубопровода. Затухание волн с расстоянием

обосновано рассеиванием энергии деформирования на расширяющийся цилиндрический слой грунта. В случае вязкоупругого грунта наблюдается также затухание по времени в фиксированных точках грунта, максимальные касательные напряжения достигаются вблизи контактной поверхности подземного трубопровода и на этом участке происходит интенсивное уменьшение амплитуды касательного напряжения. Показано также рассеивание энергии за каждый цикл деформирования для вязкоупругого грунта.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору К.С. Султанову за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. –392 с.
- [2] Sultanov K.S., Khusanov B.E., Rikhsieva B.B. Shear waves around an underground pipeline // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol.869. 2020. P.052016.
- [3] Yao E., Wang S., Miao Y., Ye L., Zhu L. Simulation of fully non-stationary spatially varying ground motions considering non-linear soil behavior // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Vol.129. 2020. P.105954.
- [4] Ramos J.I. Shock waves of viscoelastic Burgers equations // International Journal of Engineering Science. Vol.149. 2020. P.103226.
- [5] Sultanov K.S., Khusanov B.E., Rikhsieva B.B. Interaction of a rigid underground pipeline with elastic-viscous-plastic soil // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. Vol.883. 2020. P.012038.
- [6] Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Логос, 2009. – 512 с.
- [7] Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. – 288 с.
- [8] Chai S., Tian W., Yu L., Wang H. Numerical study of ground vibrations caused by cylindrical wave propagation in a rock mass with a structural plane // Shock and Vibration. Vol.2020. 2020. P. 1–9.
- [9] Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. 8-ed. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier Science Publishers, 1999. – 425 p.
- [10] Рыков Г.В., Скобеев А.М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. –168с.
- [11] Muggleton J.M., Kalkowski M., Gao Y., Rustighi E. A theoretical study of the fundamental torsional wave in buried pipes for pipeline condition assessment and monitoring // J. Sound Vib. Vol.374. 2016. P.155–171.
- [12] Borchardt R.D. Viscoelastic waves in layered media. Cambridge University Press, 2009. – 305 p.
- [13] Хусанов Б.Э., Рихсиева Б.Б. Распространение цилиндрических сдвиговых волн в грунте вокруг подземных трубопроводов // Динамика системы, механизмов и машин. Т.9. № 4. С. 45–53.
- [14] Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 2010. – 246 p.

Дата поступления  
06.07.2022

#### **Рихсиева Б.Б. Ер ости қувурининг бўйлама ҳаракатида грунтдаги жараёни бир ўлчовли моделлаштириш**

**Аннотация:** Ер ости қувурининг грунт билан ўзаро силжиидаги таъсири жараёни бир ўлчамли ҳолда сонли моделлаштирилган. Бунда асосий эътибор қувур атрофидаги грунтнинг ҳаракати ва деформацияланишига қаратилган, шунинг учун қувур деформацияланиши хусусиятларини эътиборга олинмаган. Чекли айирмалар усули ёрдамида грунтнинг ҳаракати ва ундаги силжии тўлқинлари тарқалишининг бир ўлчовли масаласини сонли ечиши услуби ишлаб чиқилган. Ишлаб чиқилган сонли услуб грунтнинг нозичиқ деформацияланиши хусусиятларини ҳисобга олиши имконини беради; у грунтларнинг эластик ва қовушиқоқ–эластик моделлари учун синовдан ўтказилган. Ер ости қувурининг бўйлама ҳаракатида эластик ва қовушиқоқ–эластик грунтда силжии тўлқинларининг тарқалишининг сонли ечимлари олинган. Олинган сонли натижалар ер ости қувурининг қўндаланг кесимидан узоқлашган сари тўлқин параметрларининг сўнишини кўрсатган. Масофа бўйича тўлқин параметрларининг сўниши деформацияланиши энергиясининг кенгайиб бораётган цилиндрсимон грунт қатламига тақсимланиши билан асосланган. Қовушиқоқ–эластик грунтларда фиксирланган нуқталарда вақт бўйича ҳам тўлқинларнинг сўниши кузатилган, максимал уринма кучланишлар ер ости қувурининг контактдаги юзалари яқинида эришилган ва шу соҳада уринма кучланишлар амплитудасининг интенсив пасайиши содир бўлиши аниқланган.

**Калим сўзлар:** грунтлар; силжиидаги тўлқинлар; силжиидаги ўзаро таъсир; эластиклик; қовушиқоқ–эластиклик; уринма кучланиши; силжии деформацияси.

#### **Rikhsieva B.B. Simulation of soil behavior under longitudinal motion of underground pipeline in a one-dimensional statement**

**Abstract:** The process of shear interaction of an underground pipeline with soil is numerically modeled in a one-dimensional statement. The main attention is paid to the behavior of soil around the pipeline. The strain characteristics of the pipeline are ignored. A technique for the numerical solution of a one-dimensional problem of soil behavior and shear wave propagation was developed using the finite difference method. The developed method of numerical research made it possible to take into account the nonlinear properties of soil strain and was tested for elastic and viscoelastic simulation of soils. Numerical results were obtained for the shear wave propagation in elastic and viscoelastic soil under the longitudinal motion of an underground pipeline. The results obtained showed the attenuation of wave parameters with distance from the cross-section of the underground pipeline. The attenuation of waves with distance is justified by the dissipation of strain energy on an expanding cylindrical soil layer. In the case of viscoelastic soil, attenuation over time at fixed points of soil is also observed; the maximum shear stresses are reached near the contact surface of the underground pipeline, and in this area, an intensive decrease in the shear stress amplitude is observed.

**Keywords:** soils; shear waves; shear interaction; elasticity; viscoelasticity; shear stress; shear strain.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ КЕРАМЗИТОБЕТОНА ПРИ СЖАТИИ И РАСТЯЖЕНИИ

Раупов Ч.С., Шермухамедов У.З., Маликов Г.Б.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ulugbekjuve@mail.ru

**Аннотация:** Показано, что в связи со стремлением к облегчению веса сооружений особую актуальность приобретают исследования природы деформируемости керамзитобетона, в частности, ползучести при разных уровнях напряжений. Выявлено, что ползучесть бетона оказывает сильное влияние на распределение усилий в статически неопределимых системах, бетонных и железобетонных плотинах, мостах больших пролетов. Обосновано, что имеющиеся в настоящее время работы не содержат исчерпывающих ответов на ряд вопросов, связанных с расчетом прочности избегаемых элементов из легких бетонов, с отсутствием данных по ползучести керамзитобетона. Экспериментально определены предельные значения относительной деформации ползучести и усадки, предложены зависимости для определения меры нелинейной ползучести, границы линейной и нелинейной ползучести керамзитобетона. На основе экспериментальных данных определена кинетика изменения характеристик деформирования, коэффициента поперечной деформации, а также продольной деформации образцов керамзитобетона, разрушившихся при длительном действии постоянной нагрузки.

**Ключевые слова:** керамзитобетон; прочность; модель упругости; линейная и нелинейная ползучесть; мера ползучести; осевое сжатие и растяжение; предшествующее нагружение; длительное нагружение.

**Введение.** В настоящее время проблема создания и исследования механических моделей железобетона, адекватно отражающих такие характерные свойства материала, как ползучесть и усадка, несомненно, является актуальной [1–3].

В связи со стремлением к облегчению веса сооружений особую актуальность приобретают исследования природы деформируемости керамзитобетона, в частности, ползучести. Величина ползучести является важнейшим параметром, учитываемым при проектировании предварительно-напряженных железобетонных конструкций. Ползучесть бетона оказывает сильное влияние на распределение усилий в статически неопределимых системах, бетонных и железобетонных плотинах, мостах больших пролетов [5–7].

Среди других наиболее известных моделей для предсказания ползучести проектируемых сооружений включают европейскую модель 1990 Comite Euro-International du Beton (1990 CEB) [8] и упрощенную модель BP (Bazant-Panula) [9]. Модель 1990 CEB очень похожа на модель ACI Committee 209 [9] и учитывает для предсказания ползучести факторы возраста нагружения, продолжительности нагрузки, тип цемента, относительную влажность окружающей среды, толщину и размер сооружения. Одним из главных отличий между этой моделью и моделью ACI Committee 209 [10] является то, что в ней рассматривается прочность бетона, как одна из переменных в предсказании ползучести. Второе главное отличие то, что факторы влияния относительной влажности среды, размера и толщины сооружения на степень ползучести рассматриваются в дополнение к влиянию этих переменных на общую или предельную ползучесть. Неучет влияния этих факторов на степень ползучести является недостатком модели ACI Committee 209 [10].

Различают линейную и нелинейную ползучесть бетона. При линейной ползучести зависимость между напряжениями и деформациями ползучести можно считать линейной. Такая зависимость наблюдается лишь при сравнительно невысоких напряжениях. При более высоких напряжениях в бетоне развиваются деформации нелинейной ползучести; такие деформации растут быстрее напряжений [11].

Наиболее значительные работы в области теории упругости принадлежат Н.Х. Арутюняну, С.В. Александровскому, В.М. Бондаренко, Н.А. Буданову, А.А. Гвоздеву, П.И. Васильеву, И.И. Гольденблату, Я.Д. Лившицу, Г.Н. Маслову, Ю.Н. Работнову, А.Р. Ржаницыну, И.Е. Прокоповичу, И.И. Улицкому, С.В. Бондаренко, А.Д. Беглову, Р.С. Санжаровскому, В.Д. Харлабу и многим другим ученым [11]. В книге Н.Х. Арутюняна, А.А. Зевина [12] приведены методы расчета сплошных тел различного очертания, а также элементов армированных стержневых систем на примере колонны с учетом линейной ползучести и старения материала.



Имеющиеся в настоящее время работы не содержат исчерпывающих ответов на ряд вопросов, связанных с расчетом прочности изгибаемых элементов из легких бетонов, с поведением бетонов при малоцикловом и длительном нагружении; с отсутствием данных по ползучести и длительной прочности керамзитобетона. Многие важные вопросы проектирования и расчета керамзитобетонных конструкций из-за трудностей создания законченной теории их деформирования и разрушения решаются приближенно, на эмпирической или полуэмпирической основе [1, 5].

**Методика испытания.** Загружение образцов при разных уровнях напряжений на сжатие и растяжение проводилось соответственно в пружинных и рычажных установках с максимальным усилием 210 и 30 кН.

При испытании на сжатие образцы – призмы устанавливали с приклеенными к торцам металлическими опорными плитами толщиной 30 см с шаровыми шарнирами, а на растяжение цилиндры – образцы крепили на установке с помощью цанговых захватов и шарниров Гука (рис.1). При нагружении высокими уровнями нагрузки в установку устанавливали один образец (рис.1,*а*), а низкими уровнями нагрузки – два образца (рис.1,*б*).

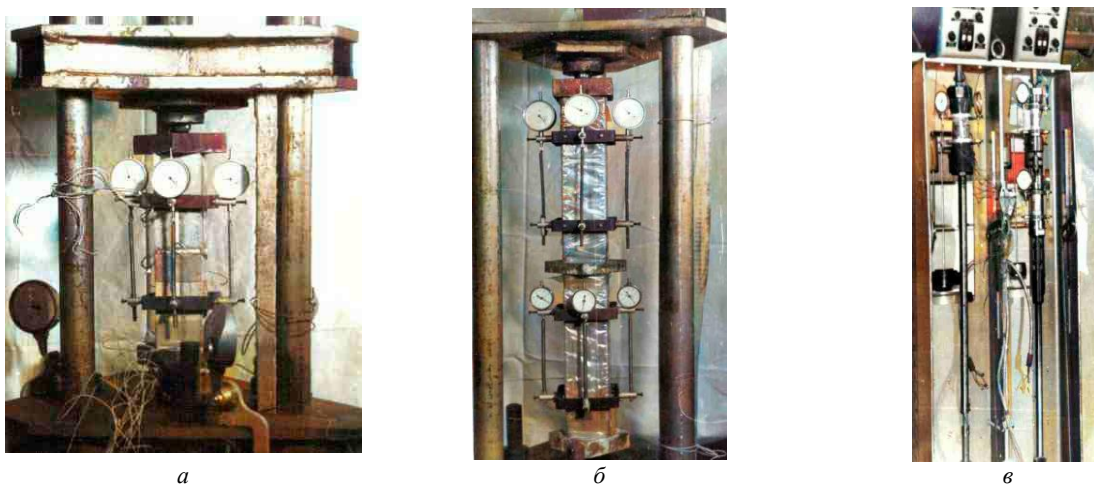


Рис. 1. Испытание образцов при длительном сжатии (*а*, *б*) и растяжении (*в*)

При установке двух призм между ними прокладывали металлические пластинки толщиной 20 мм, а при установке двух цилиндров – шарнир Гука. Значение нагрузки задавали по деформациям пружин, предварительно градуированных на прессе, на котором проводили кратковременное нагружение.

Деформации пружин при градуировании измеряли прогибомерами ПАО–6 с ценой деления 0.01 мм, установленными по двум противоположным сторонам (образующим) пружин.

С целью исключения погрешности, связанной с неаддитивностью усадки и ползучести, образцы перед нагружением гидроизолировали с боковых сторон слоем парафина толщиной 2–3 мм и двумя слоями полиэтиленовой пленки с проклейкой швов изоляционной лентой.

Методикой длительного исследования керамзитобетона при осевом сжатии предусматривалось создание в призмах напряжений  $(0.2–0.95)R_b$ . Методикой длительного исследования керамзитобетона при осевом растяжении предусматривалось создание в цилиндрах напряжений  $0.3R_{bt}$  и  $(0.8–0.95)R_{bt}$ .

Образцы до заданного уровня напряжений сжатия и растяжения с целью разделения упругой и неупругой частей полной деформации нагружали ступенями 0.10 от разрушающей с выдержкой нагрузки на ступени до прекращения прироста деформации. Образцы при испытании на сжатие нагружали гидравлическим домкратом, установленным между верх-

ними опорными плитами пружинных установок, контролируя усилие при помощи прогибомеров, установленных по трем сторонам установки. После достижения заданного усилия соответствующие части (упорные гайки) закрепляли и в течение всего эксперимента вели постоянное наблюдение за показаниями прогибомеров. Уменьшение сжимающего усилия во времени, обусловленное деформациями ползучести образца, компенсировалось периодическими догрузками до начального уровня. В опытах падение напряжения в образцах было не выше 1 МПа, что не превышает 0.05% от заданного уровня. Погрешность измерения усилий в образцах составляла  $\pm 0.01$  МПа.

В процессе испытаний на сжатие на низких уровнях нагружения (при  $\eta=0.2-0.7$ ) для измерения продольных деформаций образцов применяли индикаторы часового типа с ценой деления 0.01 или 0.001 мм, установленные с помощью металлических рамок стационарно по четырем граням призмы на базе 150 мм. На высоких уровнях нагружения (при  $\eta=0.7-1.0$ ) продольные и поперечные деформации измеряли тензорезисторами с базой 20 и 50 мм. Схемы наклейки тензорезисторов приведены на рис. 2.

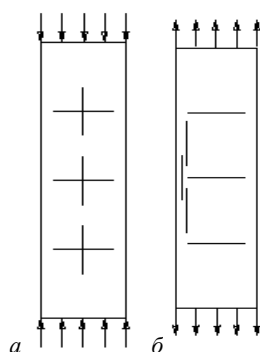


Рис. 2. Схема наклейки тензорезисторов на призму (а) и цилиндры (б)

В процессе испытаний на растяжение на низком уровне (при  $\eta=0.3$ ) для измерения продольных деформаций образцов применяли индикаторы часового типа с ценой деления 0.001 мм, установленные с помощью металлических рамок стационарно по двум образующим цилиндра, а на высоких уровнях нагружения (при  $\eta=0.70-0.95$ ) – тензорезисторы с базой 20 и 50 мм. Схемы наклейки тензорезисторов приведены на рис.2, а,б. При уровне  $\eta=0.70$  измерения вели параллельно обоими способами.

С целью отработки методики длительного тензометрирования и оценки достоверности получаемых при этом данных были проведены методические опыты, аналогичные в работе [13], в которых деформации измеряли параллельно на керамзитобетонных и металлических образцах.

С целью уменьшения влияния усадочных явлений, имеющих место при твердении клея, тензорезисторы наклеивали на образцы за три месяца до испытания и гидроизолировали специальной мастикой для исключения воздействия колебаний влажности окружающей среды на их показания.

Все образцы находились в одинаковых условиях ( $T=20\pm 2^\circ\text{C}$ ,  $W=70-80\%$ .) с загруженными длительной нагрузкой. В течение всего периода испытаний регулярно проводилась проверка стабильности измерительной схемы включением контрольного полумоста измерителя АИД-4. При проведении эксперимента было установлено, что незначительные колебания температуры и влажности (на  $1-3^\circ\text{C}$  или  $3-5\%$ ) не приводят к изменению значений деформаций.

В процессе отработки методики длительного тензометрирования были установлены основные факторы, нарушающие стабильную работу измерительной схемы, включающей в себя тензорезисторы, возраст наклейки тензорезисторов и вторичный тензометрический прибор. Отмеченные выше методические приемы обеспечили достаточно стабильную работу измерительной схемы в течение 400 суток (уход “нуля” измерительной схемы за это время не превышал  $\pm 2.0 \cdot 10^{-5}$ ). Анализ результатов проведенных опытов позволяет считать различие в измерении деформаций бетона под длительно действующей нагрузкой индикаторами и тензорезисторами не существенным. Результаты измерений деформаций бетона под длительно действующей нагрузкой индикаторами и тензорезисторами сопоставимы.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что дефор-

магии ползучести бетона можно измерять достаточно надежно тензорезисторами на бумажной основе, соблюдая при этом требования по гидроизоляции тензорезисторов, обеспечив необходимую продолжительность (более месяца) полимеризации клея и стабилизации положения нуля тензостанций.

Для учета деформаций, связанных с незначительными изменениями температуры и влажности в помещении, служили ненагруженные изолированные образцы–близнецы. Одновременно с измерением деформаций образцов, установленных под длительную постоянную нагрузку, измерялись деформации ненагруженных образцов–близнецов для определения деформации усадки.

Перед загруженной длительно-действующей нагрузкой образцов их близнецы по аналогичной схеме испытывались на прессе при кратковременном действии нагрузки до разрушения. В эти же сроки проводилось испытание кубов.

Испытание образцов под нагрузкой, загруженных при низких уровнях  $(0.20-0.70)R_b$  и  $0.3R_{bt}$ , продолжалось в течение 210 суток, а затем они были разгружены и измерены деформации последствия в течение 56 суток. С истечением 56 суток после разгрузки основные и контрольные образцы были доведены до разрушения при кратковременном действии сжимающей нагрузки и определены модуль упругости и предел прочности при сжатии для выяснения значения функции  $m(t, \tau_1) = R'/R \approx E'/E$  (где  $R'$ ,  $R$ ,  $E'$ ,  $E$  – прочность и модуль упругости соответственно основных и контрольных образцов), учитывающего влияние предшествующего нагружения материала на кратковременную прочность и модуль упругости.

Деформации ползучести при сжатии и растяжении вычислялись с учетом деформаций, натекающих за время выдержек при кратковременном ступенчатом нагружении образцов до заданного уровня напряжений.

В настоящих исследованиях проверке однородности бетона и подбору групп образцов–близнецов уделялось самое серьезное внимание. Тем не менее, несмотря на тщательность подбора групп образцов–близнецов, разброс опытных данных по времени до разрушения оказался довольно существенным. В связи с этим пришлось отказаться от отработки результатов испытаний «по группам» и перейти на отдельные образцы. «Действительный» уровень напряжений в бетоне уточнялся на основе совместного анализа кривых деформации « $\eta-\sigma_x$ », полученных при нагрузке образцов на длительное восприятие нагрузки с имеющейся уже «эталонной» кривых « $\eta-\sigma_x$ », полученных при кратковременном испытании.

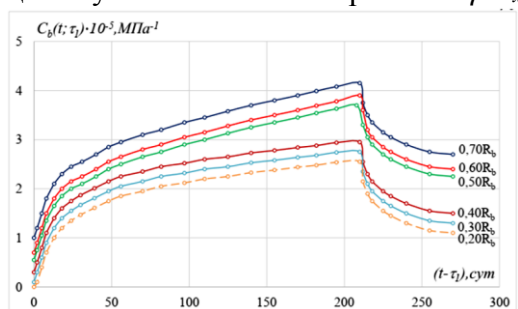


Рис.3. Кинетика изменения меры ползучести керамзитобетона во времени на осевом сжатии при разных уровнях длительной нагрузки

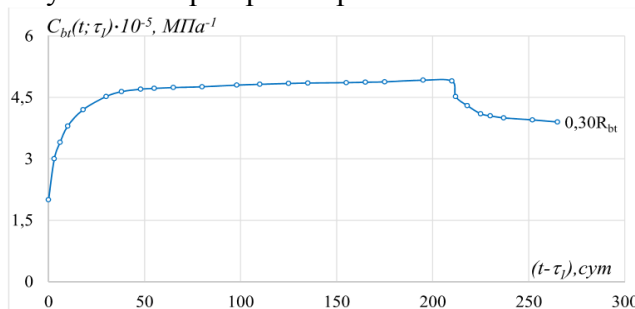


Рис.4. Кинетика изменения меры ползучести керамзитобетона во времени на осевом растяжении

Кинетика изменения меры ползучести керамзитобетона во времени при осевом сжатии и растяжении приведены на рис. 3 и 4, а деформаций усадки – на рис. 5. Кривые роста меры ползучести образцов имеют наибольший подъем в начальный период после приложения нагрузки (30 суток), в дальнейшем происходит некоторое уменьшение роста меры ползучести с тенденцией к стабилизации. Можно предположить, что интенсивное развитие меры ползучести в первые дни после приложения нагрузки объясняется значительными структурными деформациями бетона.

До напряжений  $0.4R_b$  деформации ползучести керамзитобетона при сжатии развиваются практически в условной линейной области. При  $0.5R_b$  деформации ползучести развиваются явно не по линейному закону, можно предположить, что в случае  $\sigma_1/R_b > 0.4$  в образцах начинают появляться микротрещины.

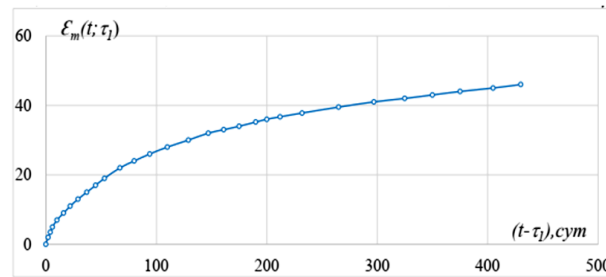


Рис.5. Кинетика изменения деформации усадки керамзитобетона во времени

При анализе характера изменения деформаций ползучести был использован более простой способ выявления нелинейности их развития. На рис. 4 представлены графические зависимости предельной деформации ползучести  $\varepsilon_{x,p}(\infty, \tau_1)$ , определенной по ГОСТу 24544–2020, от величины относительных напряжений длительного сжатия  $\sigma/R_b$ . Как следует из этого графика, у керамзитобетона до напряжений  $0.4R_b$  деформации ползучести развиваются практически в линейной области. Полученные результаты хорошо согласуются с данными работ [14, 15].

На рис. 3–5 приведены расчетные кривые, построенные с использованием одного из уравнений (1) теории упругоползучего тела, полученного на основе модификации теории упругоползучего тела при ядре Н.Х. Арутюняна [12]. Полученные результаты свидетельствуют о хорошей сходимости расчетных кривых с опытными данными (расхождение не более 10%).

В работе [16] для определения относительной деформации нелинейной ползучести керамзитобетона предлагается зависимость

$$\varepsilon_{x,p}(t; \tau_1) = (\sigma_{bl} + \alpha \sigma_{bl}^3) C_b(t; \tau_1), \quad (1)$$

где  $\sigma_{bl}$  – действующее напряжение, МПа;  $\alpha$  – численный коэффициент, определяемый из опыта;  $C_b(t; \tau_1)$  – мера линейной ползучести керамзитобетона, которую можно определить по предлагаемой в [16] зависимости.

Для численного решения уравнения (1) необходимо определить значения предела кратковременной прочности при осевом сжатии и растяжении и меры ползучести  $C_b(t; \tau_1)$ ,  $C_{bl}(t; \tau_1)$  и изменение его во времени значений модуля упругости и функций  $m(t; \tau_1)$ .

Значения меры линейной ползучести растворной части керамзитобетона при осевом растяжении (если нет прямых опытных данных) определяют по формуле

$$C_{bl}^*(t; \tau_1) = \lambda(t; \tau_1) C_b(t; \tau_1), \quad (2)$$

где

$$C_b(t; \tau_1) = \frac{70R_b^2(\tau_1 - 2) + 13000R_b - 140000}{(177R_b - 1700)R_b\tau_1^{\frac{3}{2}}} 10^{-5} + \frac{0.2R_b + 15\tau_1 - 0.2R_b + 100}{R_b} [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}] 10^{-5}, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = 0.015 + \frac{18}{R_b}, \quad (4)$$

второй множитель в формуле (4) учитывается при  $\tau_1 > 16$  суток:

$$\lambda(t; \tau_1) = a + \frac{b(t; \tau_1)}{t_1}, \quad (5)$$

для керамзитобетона плотной структуры (на кварцевом песке) [17]:

$a=2.15; b=0.63$  при  $0 < (t - \tau_1) \leq 2$  сут;  
 $a=3.40; b=-0.077$  при  $2 < (t - \tau_1) \leq 15$  сут;  
 $a=2.25; b=-0.03$  при  $15 < (t - \tau_1) \leq 100$  сут;  
 $a=2.00; b=0$  при  $(t - \tau_1) > 100$  сут;

для керамзитобетона пористой структуры (на керамзитовом песке):

$a=2.0; b=1.0$  при  $0 < (t - \tau_1) \leq 2$  сут;  
 $a=4.06; b=0.03$  при  $2 < (t - \tau_1) \leq 100$  сут;  
 $a=1.0; b=0$  при  $(t - \tau_1) > 100$  сут.

Значения функции  $m(t; \tau_1)$ , учитывающие влияние длительной нагрузки на изменение поверхностной энергии материала в зоне трещин для керамзитобетонных, вычисляются по формуле

$$m(t; \tau_1) = a_1 + b_1 \lg(t - \tau_1), \quad (6)$$

где  $a_1=1.091; b_1=0.035$  при  $\tau_1 \leq 28$  сут;

$a_1=1.033; b_1=0.029$  при  $\tau_1 > 28$  сут.

Предельные значения относительной деформации ползучести и усадки керамзитобетона определялись методом построения линий регрессии вида

$$\frac{(t - \tau_1)}{\varepsilon_{x,p}(t; \tau_1)} = [A + B(t - \tau_1)] 10^{-5} \quad (7)$$

(по ГОСТ 24544–81), что позволяло линеаризовать кривые, описывающие деформации ползучести и усадки во времени.

Численные значения коэффициентов А и В уравнения (7), принятого для описания кривых изменения деформации усадки и ползучести при сжатии, приведены в табл. 1.

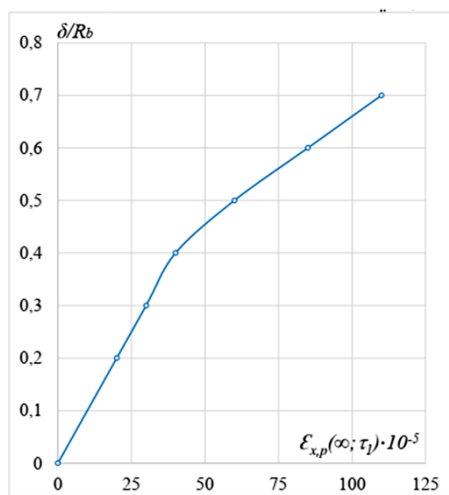


Рис. 6. Изменение предельных деформаций ползучести в зависимости от уровня длительной нагрузки

Таблица 1.

Результаты статистической обработки испытаний (значение коэффициентов А и В)

$\sigma_1/R_b$	А	В
0.2	1.329	0.053
0.3	0.745	0.032
0.4	0.463	0.023
0.5	0.667	0.014
0.6	0.513	0.011
0.7	0.295	0.009
Усадка	1.976	0.017

В табл. 2 и на рис. 6 приведены значения полных продольных и поперечных деформаций бетона (включая полные деформации за время загрузки), деформаций ползучести (с учетом деформаций за время выдержек) и дифференциального коэффициента поперечной деформации к моменту разрушения образцов. Как видно из полученных данных, предельное значение деформаций ползучести зависело от интенсивности напряжения и увеличивалось по мере увеличения уровня длительного напряжения. Видно, что деформация ползучести составляла 75–90% предельной деформации ползучести.

Как видно из полученных данных, кратковременная прочность керамзитобетона при растяжении, претерпевшего длительное растяжение, имела тенденцию к повышению по сравнению с ненагруженным образцом до 10%, а модуля упругости – до 8%.

Результаты определения значений функций  $m(t; \tau_1)$  (табл. 3) показывают, что при напряжениях  $(0.2-0.4)R_b$  повышение прочности и модуля упругости при сжатии составило

соответственно 6–15 и 1–5%, что подтверждается выводами в [18, 19]. Зона упрочнения сдвинута в сторону заниженных напряжений  $(0.2–0.4)R_b$ .

Таблица 2

Результаты исследования деформации ползучести при осевом сжатии и растяжении					
Серия	$\sigma/R_b(R_{bt})$	Деформация			
		упругая	ползучести	предельная	
		к моменту приложения длительной нагрузки	за 210 суток	деформация ползучести	мера ползучести
При сжатии					
	0.2	38	18	19	2.76
	0.3	57	28	31	3.01
БВ	0.4	76	40	44	3.21
	0.5	95	64	74	4.31
	0.6	114	79	96	4.42
	0.7	133	97	109	4.62
При растяжении					
БВ	0.3	2.8	3.1	–	–

Таблица 3

**Влияние предшествующего нагружения на прочность и модуль упругости бетона  
(Перед откосом – данные по прочности, после откоса – по модулю упругости)**

Значение функции $m(t; \tau_1)$ при интенсивности предшествующих напряжений						
сжатие						растяжение
$0.2R_b$	$0.3R_b$	$0.4R_b$	$0.5R_b$	$0.6R_b$	$0.7R_b$	$0.3R_{bt}$
1.13/1.03	1.09/1.05	1.06/0.97	0.90/0.78	0.90/0.78	0.88/0.76	1.10/1.08

Повышение прочности обжатого и растянутого бетона можно объяснить перераспределением внутренних напряжений между структурными элементами, что, в свою очередь, выравнивает поле напряжений за счет продолжающихся физико-химических процессов твердения цементного камня, а также некоторого уплотнения структуры бетона. Большие напряжения ( $\sigma/R_b \geq 0.5$ ) вызвали, в основном, снижение прочности и модуля упругости соответственно до 10–12 и 22–24% (большие значения соответствуют большим напряжениям). Снижение прочности и модуля упругости образцов, претерпевших длительное сжатие, можно объяснить появлением микротрещин в образцах в случае  $\sigma/R_b \geq 0.5$ .

Совместно анализируя зависимость между предельными деформациями ползучести и относительным уровнем длительного напряжения (см. рис. 4), можно с полным основанием считать, что ползучесть керамзитобетона при уровне загрузки, не превышающем  $\sigma/R_b = 0.5$ , может относиться к условно линейной, а наибольший уровень длительного напряжения, при котором кратковременная прочность и модуль упругости основных образцов, претерпевших длительное сжатие, не отличается от таковых для контрольных образцов – близнецов  $m(t; \tau_1) = 1$ .

В связи с тем, что данные по исследованию ползучести бетонов на пористых заполнителях при осевом растяжении весьма ограничены, нами были сопоставлены меры ползучести керамзитобетона при осевом сжатии и растяжении для уточнения характера изменения их отношений во времени. Видно, что величина отношения указанных показателей меры ползучести изменяется по криволинейному закону в зависимости от срока наблюдения (рис. 7).

Это подтверждает выводы ранее проведенных исследований раствора на литоидно-пемзовом и керамзитовом песках [15]. В начальные сроки наблюдения  $(t; \tau_1) \leq 2$  суток мера ползучести керамзитобетона при растяжении значительно превосходит меру ползучести при сжатии, затем их соотношение начинает уменьшаться и при  $(t; \tau_1) > 100$  суток практически стабилизируется (см. рис. 5). Для расчета кривую можно разбить на четыре участка и принимать изменения

$$\lambda(t; \tau_1) = C_{bt}(t; \tau_1) / C_b(t; \tau_1), \quad (8)$$



в зависимости от  $(t; \tau_1)$  по линейному закону на каждом участке:

$$\lambda(t; \tau_1) = \frac{a + b(t - \tau_1)}{t_1}, \quad (9)$$

где  $a=2.15; b=0.63$  при  $0 < (t - \tau_1) < 2$  суток;  
 $a=3.40; b=-0.077$  при  $2 < (t - \tau_1) < 15$  суток;  
 $a=2.25; b=-0.03$  при  $15 < (t - \tau_1) < 100$  суток;  
 $a=1.95; b=0$  при  $(t - \tau_1) > 100$  суток.

Полученные в экспериментах значения мер ползучести керамзитобетона при растяжении и сжатии и их отношений  $C_{bt}(t; \tau_1)/C_b(t; \tau_1)$  в возрасте  $(t - \tau_1) > 100$  суток приведены в табл. 2, из которой видно, что мера ползучести керамзитобетона при растяжении больше примерно в 2 раза, чем при сжатии.

И.Г. Иванов-Дятлов и др. [20] показывают, что мера ползучести керамзитобетона при сжатии колеблется в пределах  $(2-7) \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$  и она в 1.4–1.6 раза больше, чем у равнопрочного тяжелого бетона.

Г.А. Бужевич [21] считает, что ползучесть керамзитобетона во всех случаях больше, чем ползучесть обычного бетона. Они нашли, что деформации ползучести керамзитобетона в 1.5 раза больше, чем у равнопрочного тяжелого бетона. Приблизительно такие же данные для керамзитобетона получены другими исследователями [21–23]. Мера ползучести  $C_b$  для легких бетонов (при степени сжатия образцов напряжением, не превышающим  $0.5R_b$ ) может колебаться в пределах от 2 до  $7 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$  и увеличивается по мере уменьшения класса бетона до  $20 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}^{-1}$ .

Р.К. Житкевич в работе [24], анализируя свои экспериментальные данные и обобщая результаты других исследователей, сообщает, что деформации ползучести конструктивного керамзитобетона в 1.3–30 раз больше, чем у равнопрочного тяжелого бетона (при равных по абсолютной величине напряжениях).

Для разрушенных в процессе выдержки под нагрузкой образцов графики развития деформаций приведены до последнего взятого отчета, однако, из них не все являются максимальными, так как некоторые образцы разрушались в ночное время.

Как видно из рис. 8–12, во всех разрушившихся под длительной нагрузкой образцах развитие деформаций бетона можно характеризовать тремя стадиями:

- 1) более быстрым ростом непосредственно после загрузки;
- 2) замедленным длительным ростом деформаций, спустя этот короткий период после загрузки;
- 3) убыстренным ростом деформаций перед исчерпыванием несущей способности на третьей стадии.

Убыстрение в нарастании деформаций ползучести на третьей стадии заканчивается полным разрушением образцов. Последняя стадия работы образца характеризуется особенно значительным ростом поперечных деформаций бетона при сжатии в связи с прогрессирующим развитием микро- и макротрещин.

В графиках нарастания продольной деформации ползучести при растяжении заметны определенные закономерности. Как видно из рис. 8–12, деформации ползучести изменяются в зависимости от уровня напряжений.

Для прогнозирования поведения опытных образцов при длительном действии нагрузки существенное значение имеют данные о его деформативности. Одним из таких показателей является дифференциальный коэффициент поперечной деформации.

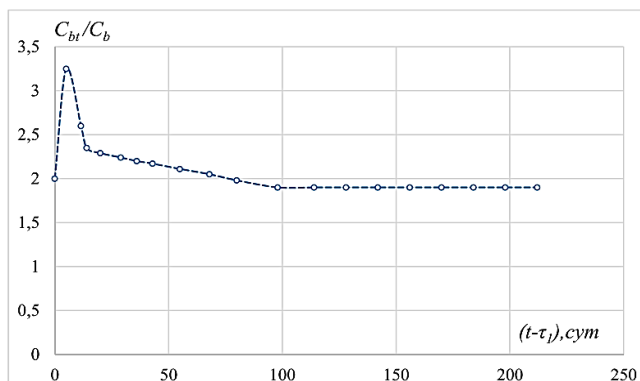


Рис. 7. Сопоставление меры ползучести керамзитобетона при осевом растяжении и сжатии

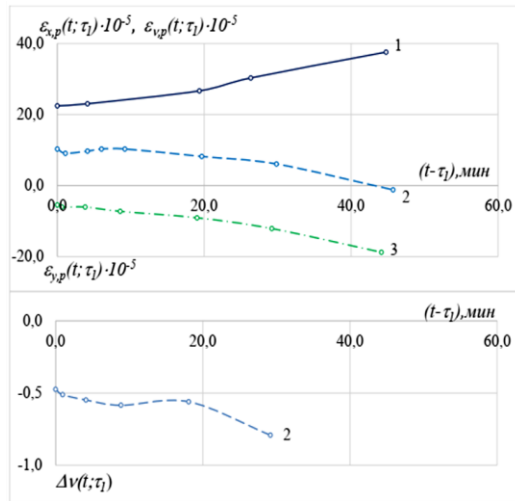


Рис. 8. Кинетика изменения характеристик деформирования керамзитобетона, разрушившегося при длительном действии нагрузки. ( $t-\tau_1 < 60$ ) мин (1, 2, 3 – номера образцов)

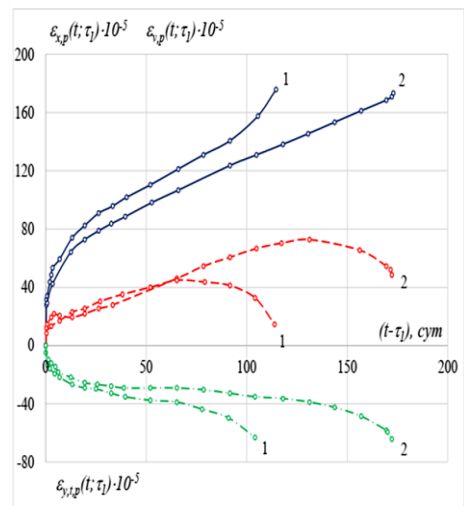


Рис. 9. Кинетика изменения характеристик деформирования образцов керамзитобетона, разрушившегося при длительном действии нагрузки (100 суток  $< t-\tau_1 < 200$  суток) (1, 2 – образцы)

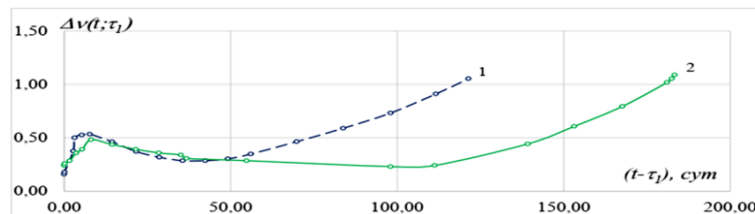


Рис. 10. Кинетика изменения коэффициента поперечной деформации образцов керамзитобетона при длительном действии постоянной нагрузки (100 суток  $< t-\tau_1 < 200$  суток) (1, 2, – номера образцов)

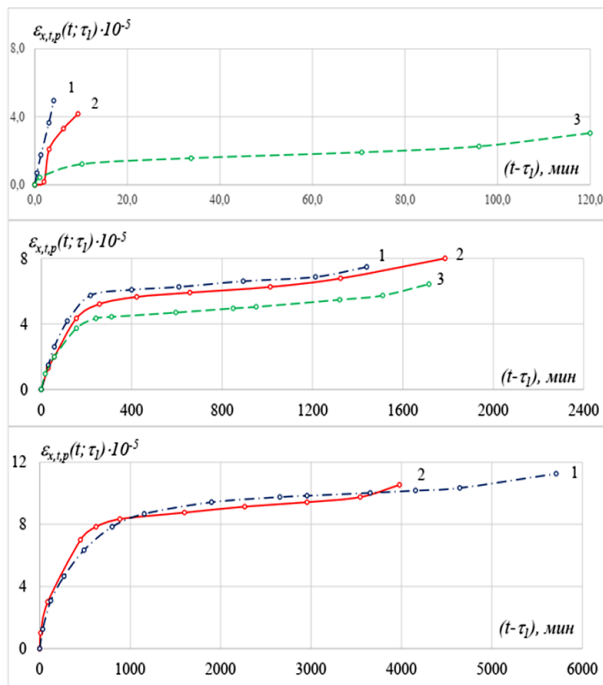


Рис. 11. Кинетика изменения продольной деформации образцов керамзитобетона, разрушившихся при длительном действии постоянной нагрузки ( $t-\tau_1 < 120$  мин) (1, 2, 3 – номера образцов)

щемся процессе разрушения.

На рис. 10 приведены графики изменения во времени коэффициента  $\Delta v$  для керамзитобетонных образцов, которые разрушились в течение нескольких часов после приложения постоянной нагрузки. На рис. 11 показан характер изменения этого коэффициента в течение 450 суток.

Для всех разрушившихся образцов при длительном нагружении напряжением  $\sigma_{bl} = (0.85-0.95)R_b$  отмечалось интенсивное возрастание коэффициента поперечной деформации во времени. Так, если к моменту приложения длительной нагрузки к образцам коэффициент поперечной деформации  $\Delta v$  был меньше 0.5, то перед самым разрушением его величина достигла больше 0.5. Для всех разрушившихся образцов характерно высокое значение коэффициента  $\Delta v$  – больше 0.5. Значительный рост этого коэффициента во времени отмечается в результате большого развития поперечных деформаций (связанных с деструктивными изменениями) и свидетельствует о самоускоряющемся процессе разрушения.



В образцах, не разрушившихся под длительной нагрузкой, наблюдалась совсем иная картина, чем в разрушившихся образцах (рис. 12).

В образцах, которые загружались до уровня напряжения  $0.8R_b$ , особенно быстрое нарастание коэффициента  $\Delta \epsilon$  отмечалось в первые сутки после приложения нагрузки. Со временем скорость нарастания коэффициента  $\Delta \epsilon$  начала уменьшаться. Аналогичную картину можно проследить по относительному изменению объема этих образцов.

На рис. 8–11 видно, что после приложения к образцам высоких длительнодействующих напряжений  $(0.85–0.95)R_b$  наблюдалось интенсивное относительное увеличение объема  $\epsilon_{v,p}(t; \tau_1)$  за счет прогрессирующего образования и развития микро- и макротрещин в момент, близкий к разрушению.

В связи с этим можно считать, что прогрессирующий рост коэффициента поперечной деформации  $\Delta \epsilon$  во времени и одновременное существенное относительное увеличение объема  $\epsilon_{v,p}(t; \tau_1)$  являются теми же признаками, наличие которых позволяет прогнозировать разрушение образца под длительной нагрузкой.

На основании анализа характера изменения  $\Delta \epsilon$  и  $\epsilon_{v,p}(t; \tau_1)$  не разрушившихся образцов под длительнодействующим напряжением можно предположить, что образцы не разрушатся, о чем свидетельствует наступившая стабилизация этих параметров во времени.

#### Заключение

1. Получена удобная для практического применения эмпирическая формула для определения и описания:

- относительной деформации нелинейной ползучести керамзитобетона (1);
- меры линейной ползучести керамзитобетона при осевом растяжении и сжатии (если нет прямых опытных данных) (2, 3);
- характера изменения  $\lambda(t; \tau_1) = C_{bt}(t; \tau_1) / C_b(t; \tau_1)$ , (8) в зависимости от  $(t; \tau_1)$  по линейному закону на каждом участке (9);
- характера влияния предшествующего нагружения на прочность и модуль упругости бетона (6);
- предельных значений относительной деформации ползучести и усадки керамзитобетона (7).

2. Экспериментально доказано, что ползучесть керамзитобетона во время сжатия при уровне загрузки  $\eta < 0.5$  находится в пределах условной линейной зависимости.

3. Выявлено, что наибольший уровень длительного напряжения, при котором кратковременная прочность и модуль упругости керамзитобетона равны прочности и модулю упругости контрольных образцов, соответствует границе условной линейной ползучести керамзитобетона. Показано, что предшествующее действие длительной сжимающей нагрузки низкой интенсивности ( $\eta < 0.5$ ) увеличивает прочность и модуль упругости керамзитобетона соответственно на 6–15 и 1–5%, а большую интенсивность ( $\eta \geq 0.5$ ) снижает соответственно до 10–12 и 22–24%. Предшествующее действие длительной растягивающей нагрузки низкой интенсивности ( $\eta = 0.3$ ) повышает прочность и модуль упругости бетона при осевом растяжении до 8–10%.

4. Выявлено, что деформации ползучести керамзитобетона при равном относительном уровне ( $\eta = 0.3$ ) напряжений при осевом растяжении превышают деформации ползучести при сжатии примерно в 3.5–4.0 раза. Выявлено также, что величина отношений меры ползучести бетона при растяжении к мере ползучести при сжатии интенсивно увеличивается в начальный период после загрузки ( $t - \tau_1 \leq 2$  сут.), затем начинает уменьшаться (2 сут.  $< (t - \tau_1) \leq 100$  сут.) и с течением времени в значительных сроках наблюдения стабилизируется ( $t - \tau_1 > 100$  сут.).

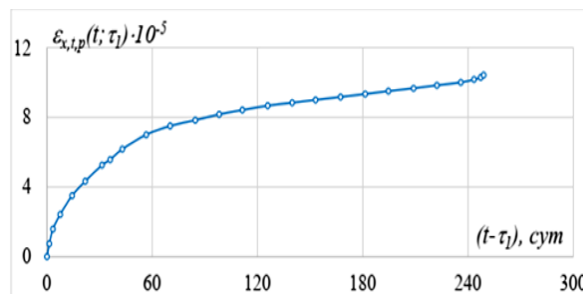


Рис. 12. Кинетика изменения продольной деформации образцов керамзитобетона, разрушившихся при длительном действии постоянной нагрузки ( $t - \tau_1 < 300$  сут.)

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Аскарлов Б.А.* Новые легкие бетоны и конструкции на их основе. Ташкент: Фан, 1995. – 142с.
- [2] *Ашрабов А.А.* Легкий бетон и железобетон для индустриального строительства. Ташкент: Мехнат, 1988. – 252с.
- [3] *Зайцев Ю.В.* Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушений. М., 1982. – 196 с.
- [4] *Ходжаев А.А.* Совершенствование расчета железобетонных конструкций при режимных нагружениях: Дис.... докт. техн. наук. Ташкент, 1997. – 437 с.
- [5] *Раунов Ч.С.* Керамзитобетон для транспортного строительства: Монография. Ташкент: Tamaddun, 2020. – 356 с.
- [6] *Ashrakov A.A., Raupov Ch.S.* Work of lightweight concrete beams in view of a descending branch of the diagram. International Conference held in Malaysia, the collection of scientific researches, 2002. P. 139–142.
- [7] *Ashrakov A.A., Raupov Ch.S.* The normalization of long-lived durability of lightweight concrete at monoaxial stressing. International Conference held in Malaysia. The collection of scientific researches, 2002. P. 134–138.
- [8] Comite Euro-International du Beton (CEB), CEB-FIP Model Code 1990, Final Draft, Lausanne, 1991.
- [9] *Bazant Z.P., Panula L.* Creep and Shrinkage Characterization for Analyzing Prestressed Concrete Structures. Характеристики ползучести и усадки для анализа преднапряженных бетонных структур // PCI Journal, May/June. Vol.15. 1980. No.3, P. 87–122.
- [10] ACI Committee 209. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures. Предсказание ползучести, усадки и температурных эффектов в бетонных структурах (ACI 209R-92). ACI Manual of Concrete Practice. American Concrete Institute, Detroit, MI, 1993. P. 1–47.
- [11] Учет ползучести и старения бетона в строительной механике наращиваемых тел (обзор) Завьялова О.Б. Астраханский инженерно-строительный институт (Россия) <https://gendocs.ru/v24181/?download2=1>.
- [12] *Арутюнян Н.Х., Зевин А.А.* Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1988. – 256 с.
- [13] *Красновский Р.О.* Особенности измерения деформаций бетона при осевом сжатии и растяжении // Сб.науч.тр. ВНИИФТРИ. М., 1983. С. 88–95.
- [14] *Курасова Г.П., Гуменюк Н.Т.* Структура, прочность и деформации легкого бетона. М.: Стройиздат, 1973. С. 230–244.
- [15] *Ходжаев А.А., Маилян Д.Р.* Бетон и железобетон при сложных режимах повторного нагружения. Ташкент: Фан, 1997. – 158 с.
- [16] *Харлаб В.Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела. Вып. 1. Л. ЛИСИ, 1966. С. 93–119.
- [17] *Raupov C., Karimova A., Zokirov F., Khakimova Y.* Experimental and theoretical assessment of the long-term strength of lightweight concrete and its components under compression and tension, taking into account the macrostructure of the material // E3S Web of Conferences. Vol.264. 2021. P. 02024. EDP Sciences.
- [18] *Курасова Г.П., Гуменюк Н.Т.* Структура, прочность и деформации легкого бетона. М.: Стройиздат, 1973. С. 230–244.
- [19] *Мельниченко О.В.* Экспериментальное исследование длительного поведения тяжелых высокопрочных бетонов при сжатии: Дис.... канд. техн. наук. Киев, 1977. – 147 с.
- [20] *Иванов-Дятлов И.Г.* и др. Применение керамзитобетона в дорожном строительстве. М., 1963.– 272 с.
- [21] *Бужевич Г.А.* Легкие бетоны на пористых заполнителях. М.: Стройиздат, 1970. – 272 с.
- [22] *Бакрадзе Д.Д.* Исследование длительной прочности легкого бетона: Дис.... канд. техн. наук. Тбилиси, 1985. – 140 с.
- [23] *Зайцев Ю.В.* Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушений. М., 1932. – 196с.
- [24] *Истомин А.С.* Ползучесть конструктивного керамзитобетона с учетом его технологии: Дис.... канд. техн. наук: М., 1977. – 137 с.
- [25] *Житкевич Р.К.* Ползучесть высокопрочного легкого бетона из смесей высокоподвижной и литой консистенции с модификаторами на органоминеральной основе: Дис.... канд. техн. наук. М., 2007. – 151 с.

Дата поступления  
13.08.2022

***Раунов Ч.С., Шермухамедов У.З., Маликов Г.Б. Керамзитобетоннинг сиқилиши ва чўзилишидаги чизиқли ва ноқизиқли салқилиғини экспериментал тадқиқоти***

***Аннотация:*** Иншоотларнинг оғирлигини енгиллаштириши истаги билан боғлиқ ҳолда, керамзитобетоннинг деформацияланиши, хусусан, турли кучланиш сатҳларида салқилик табиатининг тадқиқоти алоҳида долзарбликка эга. Бетоннинг салқилиғи статик ноаниқ тизимларда, бетон ва темирбетон тўғонларда, катта оралиқли кўприкларда кучларнинг тақсимланишига кучли таъсир кўрсатади. Ҳозирда мавжуд бўлган ишлар енгил бетонлардан таёрланган эгилувчан элементларининг мустаҳкамлигини ҳисоблаш, керамзитобетоннинг салқилиғи бўйича маълумотларнинг мавжуд эмаслиги билан боғлиқ бир қатор саволларга тўлиқ жавоб бера олмайди. Керамзитобетоннинг салқилик ва қиришишининг нисбий чегаравий қийматлари экспериментал йўл билан аниқланган, унинг чизиқли салқилиғининг ўлчови, чизиқли ва ноқизиқли салқилик чегараларини аниқлаш учун боғлиқликлар тавсия этилади. Тажриба маълумотлари асосида доимий юк остида синган керамзитобетонли намуналарнинг деформацияланиш тавсифлари, кўндаланг деформация коэффициентини, ҳамда бўйлама деформациянинг ўзгариш кинетикаси аниқланган.

***Калим сўзлар:*** керамзитобетон; мустаҳкамлик; эластиклик модули; чизиқли ва ноқизиқли салқилик; салқиланиш чора-тадбирлари; ўқ бўйича сиқилиш ва чўзилиш; дастлабки юкланиш; давомий юкланиш.

**Raupov Ch.S., Shermukhamedov U.Z., Malikov G.B. Experimental studies of linear and nonlinear creep of expanded clay concrete under compression and tension**

**Abstract:** In connection with the need to lighten the weight of structures, studies of the nature of the deformability of expanded clay concrete, in particular, creep at different stress levels are of particular relevance. The creep of concrete has a strong influence on the force distribution in statically indeterminate systems, concrete and reinforced concrete dams, and large-span bridges. The research currently available does not contain exhaustive answers to a number of questions related to the strength calculation of bent elements made of light concrete, and there is a lack of data on the creep of expanded clay concrete. The limiting values of the relative creep and shrinkage deformation are determined experimentally, and dependencies for determining the measure of nonlinear creep, the boundaries of linear and nonlinear creep of expanded clay concrete are proposed. On the basis of experimental data, the kinetics of changes in the deformation characteristics, the coefficient of transverse deformation, as well as the longitudinal deformation of expanded clay concrete samples that collapsed under the prolonged action of a constant load are determined.

**Keywords:** expanded clay concrete; strength; modulus of elasticity; linear and nonlinear creep; creep measure; axial compression and tension; prior loading; long loading.

УДК 622.691

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ РЕЛЬЕФНОГО УЧАСТКА МАГИСТРАЛЬНОГО ГАЗОПРОВОДА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Хужаев И.К.<sup>1</sup>, Мамадалиев Х.А.<sup>2</sup>, Аминов Х.Х.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан

<sup>3</sup>Университет Ал-Бухари, Ташкент, Узбекистан

E-mail: husniddin\_m1@bk.ru

**Аннотация:** Предложен численный метод для решения задачи о газодинамическом состоянии линейного участка магистрального газопровода, который характеризуется путевым изменением диаметра и нивелирной высоты оси трубопровода. Квазиодномерные уравнения трубопроводного транспорта газа составлены с учетом локальной и конвективной составляющих силы инерции, квадратичного закона сопротивления и силы гравитации при переменной площади поперечного сечения трубопровода. На входе в участок задано временное изменение гидростатического давления, а на выходе из участка – массового расхода газа. Начальное распределение газодинамических показателей принимали для стационарного режима функционирования. Уравнения преобразованы к уравнениям бегущих прямой и обратной волн и представлены в безразмерных переменных, которые аппроксимированы неявной схемой и с учетом направления распространения возмущений. В силу нелинейности решаемых уравнений и граничных условий составлены итерационные процессы. Разработана программа расчета, которая позволяет изучить динамики процесса в зависимости от временного изменения входного давления и выходного массового расхода при путевом изменении диаметра и нивелирной высоты оси трубопровода. Приводятся результаты отдельных расчетов.

**Ключевые слова:** магистральный газопровод; расход; давление; рельеф; бегущая волна; аппроксимация; рекуррентные формулы; вычислительный эксперимент.

**Введение.** Трубопроводы используются для транспортировки многокомпонентных жидкостей и газов на дальние расстояния, а также для передачи механической энергии. При больших рабочем давлении и площади поперечного сечения трубопровода ожидается меньшая потеря энергии при транспортировке среды или передаче механической энергии. Это следует из анализа квазиодномерных уравнений трубопроводного транспорта реальных жидкостей [1–3].

Трубопроводы функционируют под воздействием различных внутренних и внешних факторов. При малых и средних рабочих давлениях, когда диаметры труб малые, основная энергия тратится на преодоление силы сопротивления трения. При большей плотности транспортируемой среды, например воды, сила гравитации или инерции может занимать основное место среди силовых факторов. Особенно это проявляется при образовании ударной волны или кавитации.

Путевое изменение температуры газа может привести к гидратации или конденсации газа, т. е. образованию двухфазной среды в скважинах или газопроводе [4, 5]. При низкой температуре окружающей среды возможны замерзание арматуры сети трубопроводов, обледенение трубопровода или образования пробок в виде гидратов [4, 5]. Путевое повышение температуры транспортируемого газа приводит к увеличению энергетических затрат. Этому могут способствовать, например, перезапуск сети, переход к транспортировке другого состава газа, а также утечка газа из действующего газопровода.

Для проектирования и мониторинга деятельности трубопроводов широко используются возможности математического и численного моделирования [6–12]. Разработанные математические и численные модели могут описать состояния отдельного линейного участка, перегона, многониточного магистрального газопровода с головной и дожимными компрессорными станциями, закольцованной распределительной сети или сети для малого двора. В зависимости от согласованности особенностей объекта и спектра учитываемых факторов определяется адекватность математической или численной модели. В настоящее время разработаны различные автоматизированные рабочие места и тренажеры для инженеров-практиков [13–15].

Основными элементами сети газопроводов являются линейные участки, которые рассчитываются на основе упрощенных решений нелинейных уравнений в частных производных [16–17]. Местные сопротивления в магистральных газопроводах учитываются как 5%-е или 10%-е добавки к суммарному теоретическому сопротивлению линейных участков. А в газопроводах с малым или средним рабочим давлением местные сопротивления учитываются в виде поправки к длине (протяженности) линейных участков.

Часто при решении задач трубопроводного транспорта газа аналитическим способом вводят массовый расход, игнорируют членом конвективного переноса и линеаризуют закон сопротивления [16–17]. В результате этого получают полное или урезанное телеграфное уравнение. Но такие упрощения могут привести к приближенному решению задач. В связи с этим актуальна проблема решения нелинейных уравнений переноса импульса, массы и энергии в процессе трубопроводного транспорта реального газа.

Нами разработан метод численного решения аналогичных задач в рамках изотермического подхода. В используемом уравнении сохранения импульса учтены все силовые факторы. С введением вспомогательной функции понижена степень неизвестных и осуществлен переход к уравнениям прямой и обратной бегущих волн. Аналогичный переход использован в работах [18, 19], где описан численный метод решения задачи при заданных постоянных значениях входного давления и выходного массового расхода путем установления решения при постоянном диаметре газопровода. В рамках данной работы учитывается динамическое изменение граничных условий, кусочно-постоянные и переменные значения диаметра и коэффициента сопротивления участка, а также путевое изменение высоты трассы газопровода.

**Материалы и методы исследования.** Рассматриваемый в статье газопровод схематически представим следующим образом.

На входе в линейный участок обеспечивается давление  $p_0(t)$ . Из конца участка отбирается газ с интенсивностью  $M_1(t)$ . Газ имеет приведенную газовую постоянную  $R_0$ , среднюю температуру  $T$  и коэффициент сверхсжимаемости  $Z$ . Участок может иметь кусочно-постоянный или переменный радиус  $R(x)=D(x)/2$ . В зависимости от  $R(x)$  определяется значение коэффициента сопротивления  $\lambda$  по всей длине участка  $l$ . Газопровод проходит по пересеченной местности, высота трассы меняется в виде  $z_1=z_1(x)$ .

Начальное состояние участка можно принять как стационарное – состояние покоя, стационарный режим работы.

Требуется определить недостающие граничные значения в концах участка, а также распределение газодинамических показателей по участку в целом.

**Математическая модель задачи.** Для описания газодинамического состояния линейного участка с переменной площадью поперечного сечения используем квазиодномерные уравнения для изотермического случая из [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 f)}{\partial x} = -f \left( \frac{\partial p}{\partial x} + g \rho \frac{dz_1}{dx} \right) - \frac{\pi}{4} \lambda \rho u |u| R, \\ \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u f)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее  $u$  – среднерасходная скорость потока;  $p, \rho$  – давление и плотность газа;  $f(x)=\pi D(x)^2/4$  – переменная площадь поперечного сечения трубопровода;  $\sin\alpha=dz_1/dx$  – синус уклона трассы от горизонта, который может принимать постоянное, в том числе нулевое или переменное значение.

Согласно первому уравнению, которое представляет закон сохранения импульса, путевое изменение давления обусловлено локальной и конвективной составляющими силы инерции газа, изменением потенциальной энергии гравитации газа, определяемой функцией  $z_1(x)$ , а также силой сопротивления трения, значение которой зависит от направления потока.

Для решения системы уравнений (1) с необходимыми дополнениями и условиями будет использован метод бегущих волн [18]. Поэтому в уравнениях из консервативной формы переходим к обычной форме и исключим гидростатическое давление:

$$\begin{cases} \rho f \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u f \frac{\partial u}{\partial x} = -f c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - f \rho g \sin \alpha - \frac{\lambda}{2D} f \rho u |u|, \\ \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \rho f \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho f)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь учитывали уравнение состояния реального газа

$$p=c^2\rho, \quad (3)$$

где  $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  ( $c = \sqrt{zRT}$  – скорость распространения малых возмущений давления в газе [19]).

Разделим с обеих сторон уравнений системы (2) на  $f\rho$  и введем новую искомую функцию

$$\varphi = \ln \frac{f\rho}{f_*\rho_*}, \quad (4)$$

где  $f_*, \rho_*$  – характерные площадь сечения и плотность газа, и представим систему в виде:

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -c^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d \ln(f/f_*)}{dx} \right) - g \sin \alpha - \frac{\lambda}{2D} u |u|, \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \right. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь функция  $\varphi$  представлена в безразмерных переменных. Остальные переменные также представим в безразмерном виде, для чего пользуемся масштабными величинами  $l, l/c$  и  $c$  для длины, времени и скорости потока соответственно. В результате система (5) приобретает вид

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \ln(f/f_*)}{\partial \bar{x}} - \frac{gl}{c^2} \sin \alpha - \frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}|, \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = 0. \right. \end{cases} \quad (6)$$

Почленно складывая и вычитывая уравнения системы (6), приходим к системе

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial(\bar{u} + \varphi)}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} + 1) \frac{\partial(\bar{u} + \varphi)}{\partial \bar{x}} = F, \right. \\ \left. \frac{\partial(\bar{u} - \varphi)}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} - 1) \frac{\partial(\bar{u} - \varphi)}{\partial \bar{x}} = F. \right. \end{cases} \quad (7)$$

где

$$F = 2 \frac{\partial \ln(D/D_*)}{\partial \bar{x}} - \frac{gl}{c^2} \sin \alpha - \frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}|. \quad (8)$$

Таким образом, пришли к автономным уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{t}} + (1 + \bar{u}) \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} = F, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \bar{t}} - (1 - \bar{u}) \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} = F. \end{cases} \quad (9)$$

Они линейные относительно новых искомым

$$f_1 = \bar{u} + \varphi \text{ и } f_2 = \bar{u} - \varphi, \quad (10)$$

в то же время конвективные члены и правые части являются нелинейными.

При известных значениях искомым  $f_1$  и  $f_2$  скорость потока определяется как

$$u = c \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad (11)$$

функция  $\varphi = \ln \frac{\rho f}{\rho_* f_*}$  – как

$$\varphi = \frac{f_1 - f_2}{2}. \quad (12)$$

Соответственно, плотность определяется по формуле

$$\rho = \rho_* e^{\frac{f_1 - f_2}{2}}. \quad (13)$$

а с учетом зависимости  $\frac{p}{p_*} = \frac{\rho}{\rho_*}$  для давления имеем формулу

$$p = p_* e^{\frac{f_1 - f_2}{2}}, \quad (14)$$

Уравнениями (9) можно пользоваться при изучении распространения двухсторонних и односторонних волн. В частности, если известны изменения  $u$  и  $\varphi$  по времени при  $x=0$ , то по первому уравнению можно изучать распространение волны в числовом луче  $x \in [0, \infty)$ , а по второму уравнению – в левой полуоси  $x < 0$ . В этих двух случаях достаточны задания функций граничных условий  $u(0, t)$ ,  $\varphi(0, t)$  и начальных условий по распространению искомым в соответствующих числовых полуосях.

**Краевые условия для задачи.** Начальное распределение давления при заданном массовом расходе  $M = \rho u$  ( $M=0$  или  $M = \text{const} \neq 0$ ) находим численным интегрированием первого уравнения системы (1) при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

На входе в участок задан закон изменения давления по времени

$$p_0(t) = p(0, t),$$

а на выходе задавали массовый расход газа

$$M(l, t) = M_l(t).$$

Согласно введённым  $f_{20} = u_{20} - \varphi_{20}$ ,  $f_{10} = u_{10} - \varphi_{10}$  заменам условия преобразуются для функций  $f_1(x, t)$  и  $f_2(x, t)$ .

Входное условие представили в виде

$$\bar{p}_0(\bar{t}) = \bar{p}(0, \bar{t}).$$

Вычисляли  $\varphi(0, \bar{t})$ . Полагая известным значение  $f_{20}$ , находили  $u(0, \bar{t}) = f_2(0, \bar{t}) + \varphi_2(0, \bar{t})$  и  $f_1(0, \bar{t}) = u(0, \bar{t}) + \varphi(0, \bar{t})$ .

Выходное условие по массовому расходу представили в безразмерном виде:

$$\bar{u}(1, \bar{t}) \bar{\rho}(1, \bar{t}) = \frac{M(1, \bar{t})}{f_1 c \rho_*} = \tilde{Q}(t).$$

Дискретное представление этого уравнения привело к уравнению  $G(\bar{u}) = 0$ , где

$$G(\bar{u}) = \bar{Q}^{n+1} f_N e^{-f_{1,N}^{n+1}} - \bar{u} e^{-\bar{u}}.$$

Производная этой функции

$$G'(\bar{u}) = -e^{-\bar{u}}(1 - \bar{u})$$

имеет отрицательное значение ( $\bar{u} \ll 1$ ).

Проверка показала, что  $G(0) > 0$  и  $G(1) < 0$ . Поэтому в промежутке  $\bar{u} \in (0; 1)$  функция  $G(\bar{u})$  имеет единственное нулевое значение. Соответствующее значение  $\bar{u}$  можно найти методом касательных Ньютона [21].

Составлена рекуррентная формула

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \frac{\tilde{Q}_r^{n+1} f_N e^{\bar{u}^k - f_{1,N}^{n+1}} - \bar{u}^k}{1 - \bar{u}^k}.$$

Вычисления вели до выполнения условия  $|G(\bar{u})| < 10^{-10}$ .

Входное условие использовали при нахождении значений  $f_{1i}$ , а выходное условие – при нахождении значений  $f_{2i}$ .

Для внутренних точек использовали рекуррентные формулы расчета

$$f_{1i}^{n+1,s} = \frac{f_{1i}^n + \sigma(1 + w_i^n) f_{1i-1}^{n+1,s} + \tau \Phi_{1i}^n}{1 + \sigma(1 + w_i^n)}, \quad f_{2i}^{n+1,s} = \frac{f_{2i}^{n+1,s} + \sigma(1 - \tilde{w}_i^n) f_{2i+1}^{n+1} + \tau \Phi_{2i}^n}{1 + \sigma(1 - \tilde{w}_i^n)},$$

которые получены из конечно-разностного представления уравнений с учетом направления распространения возмущений  $f_1$  и  $f_2$  [18, 19]. Здесь  $\sigma = \tau/h$ .

**Результаты вычислительного эксперимента.** Расчеты проводили в рамках установления ожидаемого режима течения.

Шаги интегрирования составили  $\tau = 0.0002$  и  $h = 0.001$ . Рассматривали горизонтальный газопровод ( $\sin \alpha = 0$ ). Показатели составили  $L = 10000$  м;  $D = 1.0$  м;  $\lambda = 0.028$ ;  $M = 250$  кг/с;  $T = 300$  К,  $R = 8.31$  Дж/(моль·К),  $\rho_* = 0.699$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 378.2$  м/с,  $p_{00} = 5.6$  МПа,  $z = 0.92$ .

Предварительные расчеты проводили для постоянного диаметра участка и повторили результаты работы [19, 20].

Ограничились рассмотрением вариантов

$$D(x) = \begin{cases} D_1 \text{ при } \frac{x}{l} < 0.3 \cup \frac{x}{l} > 0.7 \\ D_1 \left\{ \left[ 1 + \beta \sin \left[ \frac{\pi}{0.4} \left( \frac{x}{l} - 0.3 \right) \right] \right] \right\} \text{ при } 0.3 \leq \frac{x}{l} \leq 0.7, \end{cases}$$

где при  $\beta > 0$  имели локально расширяющийся участок трубопровода.

На рис.1–3 приведены графики массового расхода, давления и скорости газа при  $\beta = 0.5$ .

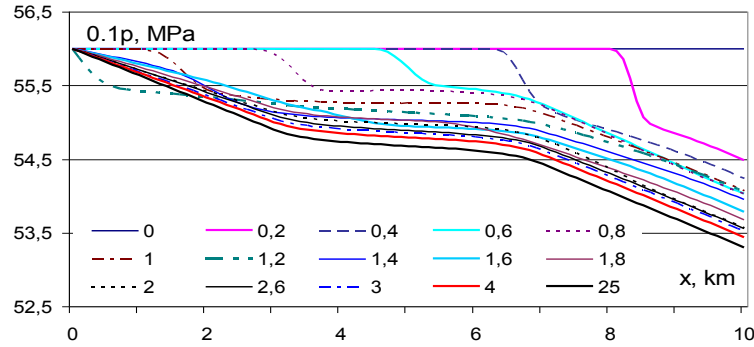


Рис. 1. Изменение давления газа по длине участка при различных значениях безразмерного времени.  $l=10$  км,  $p_{00}=5.6$  МПа,  $M^0=250$  кг/с,  $D=1$  м=const

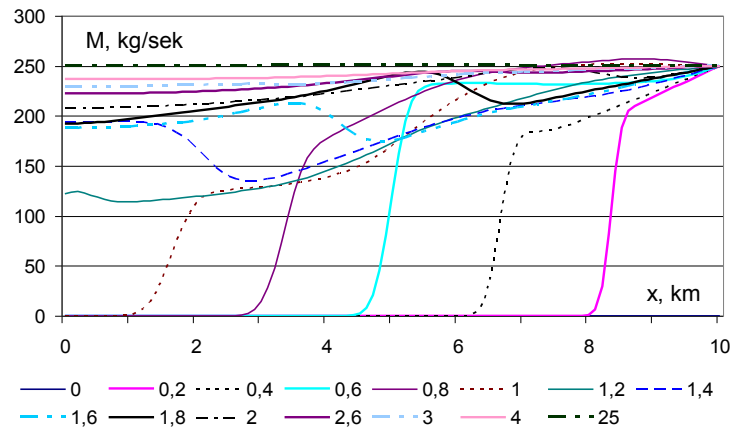


Рис. 2. Кривые массового расхода для синусоидального местного расширения диаметра  $\beta=1.5$  и  $D_1=1$  м (данные на рис.1)

Графики массового расхода показали сглаживание скачков при переходе через расширенный участок. Для давления, в конце установления, получили трехзвенную кривую. На рис.1–3 по кривым скорости явно видны скачки показателей.

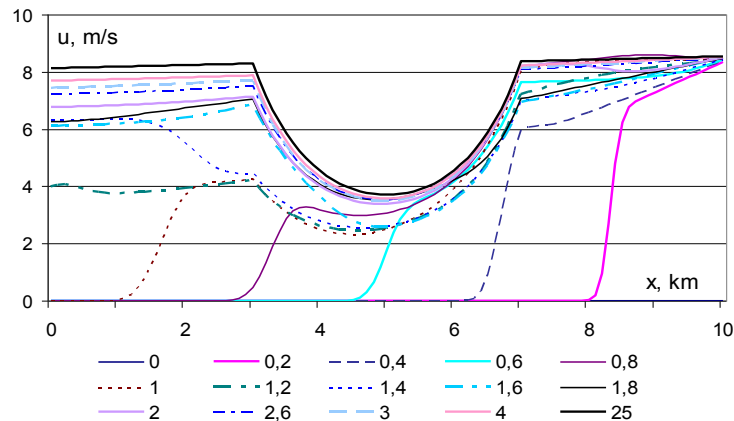


Рис. 3. Кривые скорости в процессе установления в потоке на участке с расширением  $\beta=1.5$  и  $D_1=1$  м (данные на рис.1)

**Заключение.** Разработан численный метод решения уравнений трубопроводной транспортировки газа при путевом изменении диаметра и нивелирной высоты оси трубопровода. Получены численные результаты для случая задания входного давления и выходного массового расхода в горизонтальном газопроводе с локальным расширением площади поперечного сечения. Исследованы особенности массового расхода, давления и скорости газа для участка газопровода с длиной 10 км. В частности, впервые получены трехзвенные кривые давления, обусловленные нелинейностью силы сопротивления.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. – 296 с.
- [2] Селезнёв В.Е., Алёшин В.В., Прялов С.Н. Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов. Методы, модели и алгоритмы. М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.
- [3] Lewandowski A. New Numerical Methods For Transient Modeling of Gas Pipeline Networks. New Mexico: Pipeline Simulation Interest Group, 1995.
- [4] Xu H., Kong W., Yang F. Decomposition characteristics of natural gas hydrates in hydraulic lifting pipeline // Natural Gas Industry B. Vol. 6. 2019, № 2, April. P 159–167.
- [5] Ермолаева Н.Н. Математическое моделирование нестационарных неизотермических процессов в движущихся неизотермических многофазных средах: Дис ... докт. физ.-мат. наук. Спб., 2017. – 323 с.
- [6] Yuan Q. Study on the restart algorithm for a buried hot oil pipeline based on wavelet collocation method // International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol.125. October 2018. P.891–907. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmass transfer.2018.04.127>.
- [7] Jang S.P. et al. Numerical study on leakage detection and location in a simple gas pipeline branch using an array of pressure sensors // J Mech Sci Technol. 2010. №24: P. 983. <https://doi.org/10.1007/s12206-010-0216-8>.
- [8] Gyrya V., Zlotnik A. An explicit staggered-grid method for numerical simulation of large-scale natural gas pipeline networks // Applied Mathematical Modelling. Vol.65. January 2019. P. 34–51. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.07.051>.
- [9] Doraо С.А., Fernandino M. Simulation of transients in natural gas pipelines // Journal of Natural Gas Science and Engineering. Vol.3. № 1. March 2011. P. 349–355. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2011.01.004>.
- [10] Панферов В.И., Панферов С.В. Моделирование нестационарных процессов в газопроводах // Вестник ЮУрГУ. Серия “Строительство и архитектура”. 2007. №14(86) P.44–47.
- [11] Hafsi Z., Elaoud S., Mishra M. A computational modelling of natural gas flow in looped network: Effect of upstream hydrogen injection on the structural integrity of gas pipelines // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2019. №64. P.107–117.
- [12] An Y., Wang X., Yue B., Jin S., Qu Z. A novel method for natural gas pipeline safety online monitoring based on acoustic pulse compression // Process Safety and Environmental Protection. 2019. № 130. P.174–181.
- [13] Zongming Yuan, Zhibin Deng, Maoze Jiang. Extended partial blockage detection in a gas pipeline based on Tikhonov regularization // Journal of Natural Gas Science and Engineering XXX. 2015. P.1–8.
- [14] Селезнёв В.Е., Алёшин В.В., Прялов С.Н. Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте // Математические методы моделирования и практическое применение / Под ред. Селезнёва В.Е. М.: МАКС Пресс, 2007. – 200 с.
- [15] Deng Y. et al. A method for simulating the release of natural gas from the rupture of high-pressure pipelines in any terrain // Journal of Hazardous Materials. Vol.342. 15 January. 2018. P.418–428. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2017.08.053>.
- [16] Трофимов А.С., Кочарян Е.В., Василенко В.А. Квазилинеаризация уравнений движения газа в трубопроводе // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2003. – 4 с.
- [17] Mamadaliyev X.A., Khujaev I.Q., Boltibaev Sh.K. Modelling the Propagation of mass consumption waves in the Pipeline with Damper of pressure Disturbances // Florence (Italy), International Journal of Sciences and Research. Vol.74. Aug. 2018. No.8/1. DOI: 10/21506/j.ponte 2018.8.12. P.163–170.
- [18] Khujaev I., Shodmonova G., Mamadaliyev X., Aminov X. Mathematical modeling of transition processes due to a change in gas consumption at the ends of the inclined section of the gas pipeline // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 896. 2020. P.012046. doi:10.1088/1757-899X/896/1/012046.
- [19] Khujaev I., Mamadaliyev Kh. An iterative method for solving nonlinear equations of real gas pipeline transport // AMSD-2019 Journal of Physics: Conference Series 1441. 2020. P.012145 IOP Publishing doi:10.1088/1742-6596/1441/1/012145.
- [20] Садуллаев Р. и др. Расчет магистрального газопровода с учетом рельефа местности // Газовая промышленность. М., 2003. № 8. С.58–59.
- [21] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. – 512 с.

Дата поступления  
05.04.2022

**Хўжаев И.Қ., Мамадалиев Х.А. Аминов Х.Х. Диаметри ўзгарувчан бўлган магистрал газ қувири рельефи қисмининг газодинамик ҳолати масаласини ечишининг сонли усули**

**Аннотация:** Магистрал газ қувири чизиқли қисмининг газодинамик ҳолати масаласини ечиши учун сонли усул таклиф этилган, бу қувири ўқининг диаметри ва рельеф бўйича ўзгариши билан тавсифланади. Маълумки, импульс ва массанинг сақланишига ўхшаш квази-бир ўлчовли нозичиқли тенглалар қувири орқали ташиши жараёнларини моделлаштиришида қўлланилади. Кам сиқиладиган муҳитда муҳитнинг босими ва зичлиги ўртасидаги боғлиқлик чизиқли муносабатлар сифатида ифодаланади. Ушбу боғлиқликни ҳисобга олган ҳолда, ушбу мақолада гидродинамик суюқлик тезлиги ва суюқлик-қувири тизимидаги кичик қўзғалишларнинг тарқалиши тезлиги иштирок этадиган кам сиқиладиган суюқликни қувири транспорти муаммоларини ҳал қилиши учун сонли усул таклиф қилинган. Тадқиқот доирасида импульс ва массани сақланиши тенглалари бўйича номаълум кучлар ёрдамчи функцияни киритиши орқали камаяди. Чизиқли тенглалар конвектив атамалар ва қаршилиқ кучининг шартлари нозичиқли янги номаълум миқдорларга нисбатан оқим бўйлаб ва оқимга қарши ҳаракатланадиган тўлқинларга ўтиши йўли билан тузилади. Итерация усули ва кетма-кет яқинлашиши схемаси ёрдамда йўналишни ҳисобга олган ҳолда ишлаб чиқилган.

**Калит сўзлар:** магистрал газ қувири; масса сарфи; босим; рельеф; кетма-кет яқинлашиши; итерация; ҳисоблаш тажрибаси.

*Khujayev I.Q., Mamadaliev Kh.A., Aminov Kh.Kh. Numerical method for solving the problem of the gas-dynamic state of the relief section of the main gas pipeline with a variable cross-sectional area*

**Abstract:** A numerical method is proposed for solving the problem of the gas-dynamic state of a linear section of the main gas pipeline, characterized by a path change in the diameter and leveling height of the pipeline axis. A mathematical model was developed for the problem of excitation wave propagation in a gas pipeline of a variable diameter when the boundary conditions are set in the form of time changes in the inlet pressure and outlet mass flow rate of gas. According to the model, the directional change in gas pressure is due to changes in the local and convective components of the gas inertia force, the quadratic law of resistance and the gravitational force at a variable cross-sectional area of the pipeline. The equations are transformed by reducing them to dimensionless form and introducing calibration functions, where the natural logarithm of the reduced product of the gas density and the cross-sectional area are involved.

**Keywords:** main gas pipeline; flow rate; pressure; relief; traveling wave; approximation; recurrent formulas; computational experiment.

УДК 544.77; 628.54; 628.33

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ СГОРАНИЯ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ ANSYS FLUENT

**Хамдамов М.М., Ширинов З.З.**

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: mmhamdamov@mail.ru, Ziyomat@mail.ru*

**Аннотация:** Показано, что при математическом моделировании процессов горения газового горючего в рамках программного пакета ANSYS Fluent основной проблемой является выбор модели турбулентности. В рамках работы для описания турбулентности апробированы стандартная и модифицированная  $k-\epsilon$  модели, модель Спаларта-Аллмараса,  $k-\omega$  модель и модель RNG  $k-\epsilon$  для описания перемешивания и горения метана согласно закону Аррениуса в цилиндрической камере. В расчетах использован метод контрольных объемов, включенный в ANSYS Fluent, где поля скорости и давления связываются алгоритмом PISO. Получены удовлетворительное согласие результатов расчета и эксперимента при реализации модифицированной  $k-\epsilon$  модели по осевым распределениям температуры и продольной скорости.

**Ключевые слова:** турбулентное течение; цилиндрический канал; компоненты; скорость химической реакции; полная энтальпия; закон Аррениуса; ANSYS Fluent; метод контрольного объема; вычислительный эксперимент.

**Введение.** В настоящее время программные продукты активно используются в научно-технических организациях и вузах для моделирования различных процессов. Стало актуальным их использование при изучении теплотехнических процессов, наблюдаемых в технике и технологиях.

Освоение огня сыграло ключевую роль в развитии цивилизации. Огонь открыл людям возможность термической обработки пищи и обогрева жилищ, а впоследствии – развития металлургии, энергетики и создания новых, более совершенных инструментов и технологий, где в качестве горючего используются твердые, жидкие и газообразные вещества. Управление процессами горения лежит в основе создания современных двигателей для автомобилей, самолётов, судов и ракет, где практикуется сжигание заранее перемешанных и неперемешанных взаимно реагирующих веществ.

Горение – сложный физико-химический процесс превращения исходных веществ в продукты сгорания в ходе химических реакций, сопровождающихся интенсивным выделением тепла. Его сложность заключается не только в сложнейшем математическом описании процесса, но и в сложности его экспериментального исследования. В связи с важностью процесса горения в технических устройствах в совокупности с дороговизной натуральных экспериментов происходит развитие исследования в области компьютерного моделирования.

Для исследования и анализа газодинамики и теплофизических процессов в энергетических установках в настоящее время активно применяются пакеты прикладных программ ANSYS CFD, ANSYS Fluent, ANSYS CFX, Star-CD, Flow 3D, Open Foam, Flow Vision, VP2/3, Sigma Flow, FIRE 3D, которые работают для различных условий моделирования с использованием сеточных методов с улучшенной сходимостью.

Целью данной статьи является моделирование процесса горения в программном пакете ANSYS Fluent. ANSYS Fluent – полноценный CFD пакет, не уступающий по функцио-

нальным возможностям ANSYS CFX и специализирующийся на моделировании многофазных потоков и процессов горения. Развитие вычислительной техники позволило вывести на качественно новый уровень проведения инженерных расчетов. При решении расчетных задач инженер рассматривает различные методики и подходы, которые позволяют получить качественный результат в оптимально короткий срок. Современная практика доказывает, что использование программных комплексов, основанных на методах конечных разностей и конечных элементов (МКЭ), позволяет добиться поставленных целей.

Численное исследование горения газа является сложной задачей теплофизики, так как требует учета большого количества сложных взаимосвязанных факторов и явлений. Поэтому вычислительный эксперимент становится все более важным элементом исследования процессов горения и проектирования различных устройств, использующих процесс горения. Можно с уверенностью говорить, что его роль будет возрастать и в дальнейшем. В этой связи все большее распространение в теплофизике получают методы вычислительной гидродинамики, когда появляется возможность оптимизировать эксперимент на основе его виртуального прототипа.

Исследованию процессов горения, а также образующихся веществ посвящено множество работ [1–14]. В работе [3] авторы исследуют диффузионное горение метана и пропана в камере сгорания квадратного сечения с подачей горючего через пористый цилиндр. В качестве результатов представлены профили концентраций компонентов горючего, окислителя, а также CO и CO<sub>2</sub>. В работе [4] проводится численное и экспериментальное исследование горения частично перемешанной смеси метана и воздуха в цилиндрической камере сгорания. В качестве результатов представлены распределения температуры и концентраций компонент N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, CO, H<sub>2</sub>, OH, NO. Исследование диффузионного горения при спутной подаче метана и воздуха проведено в работах [5, 6], где представлены результаты численного расчета и экспериментальные данные: профили температур и концентраций CH<sub>4</sub>, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, CO.

Потребность в эффективных и действенных математических описаниях турбулентных реагирующих систем течений привела к значительному исследовательскому интересу к турбулентным моделям, основанным на разрешении турбулентного спектра [7] и моделям горения [8], которые учитывают комплексные химические реакции без привлечения слишком больших вычислительных ресурсов. Подход LES [9] известен как одна из самых популярных турбулентных моделей, благодаря одной из его наиболее важных особенностей. В нем крупномасштабные турбулентные вихри, которые преобладают в турбулентной динамике и движениях, непосредственно разрешаются путем применения метода фильтра на основе размера ячейки [10]. Однако это хорошо известное превосходство LES в описании больших вихревых движений также приводит к одному недостатку модели: высокой вычислительной мощности, необходимой для моделирования LES из-за использования мелких ячеек сетки для заполнения расчетной области. Таким образом, подход к моделированию LES чаще используется в академических кругах, а не в инженерной практике, из-за сложных и крупномасштабных компонентов, которые часто требуются в последнем. С другой стороны, в академических кругах основное внимание уделяется физическим явлениям в конфигурациях малого и среднего масштаба, что позволяет использовать более затратный в вычислительном отношении подход LES.

Из-за этого недостатка LES альтернативные математические методы, такие как моделирование отдельных вихрей (DES) [11] и масштабно-адаптивное моделирование (SAS), привлекают больше внимания со стороны инженеров и прикладников из-за их более низких требований к вычислительной мощности и их способности разрешать турбулентный спектр. В частности, метод DES использует подход к моделированию на основе усреднения по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS) вблизи областей пограничного слоя и

подход к моделированию LES в основных областях; кроме того, метод SAS использует дополнительный масштаб длины фон Кармана, чтобы обеспечить точное распределение энергии по турбулентному спектру и улучшить характеристики модели RANS [12]. Фактически DES часто считается гибридным методом моделирования RANS-LES первого поколения, а SAS – вторым поколением. Это связано с тем, что по сравнению с DES у SAS есть два дополнительных преимущества, позволяющих быстро адаптировать его к практическим задачам. Во-первых, SAS не имеет явной локальной зависимости шага сетки в каждом направлении в отличие от DES [13]. Во-вторых, SAS можно легко включить в существующую экспериментально адаптированную модель RANS.

В статье [14] рассматривается моделирование процессов горения пылеугольного топлива и представлена методика инженерных расчетов в энергетическом котле БКЗ-500 с использованием программного комплекса ANSYS Fluent. ANSYS Fluent позволяет моделировать процесс горения с учетом турбулентности, теплообмена и химических реакций. Для проектирования расчетной сетки в области камеры сгорания использовался пакет ICEM CFD, являющийся сеточным препроцессором для ANSYS Fluent. В области камеры сгорания энергетического котла была сформирована гексаэдральная сетка, состоящая из 2 млн элементов. Течение описывается системой стационарных уравнений Навье – Стокса, сохранения массы и энергии, осредненных по Рейнольдсу. Турбулентная вязкость рассчитывалась с помощью модели  $k-\varepsilon$ . Радиационный теплообмен в двухфазном потоке был учтен в рамках P1 приближения метода сферических гармоник.

Наличие хорошо изученных механизмов реакций горения некоторых видов газа позволяет получать подробное описание большого количества протекающих процессов и широкого набора химических радикалов и реагирующих компонентов.

Среди многочисленных методик моделирования горения отдельно выделяется подход, основанный на доли смешения горючего и окислителя, – модель flamelet. К настоящему времени модель flamelet серьезно модифицирована по сравнению с оригинальной версией.

**Постановка задачи.** Рассматривается струя горючего газа, которая истекает из цилиндрического сопла с диаметром 1.2 см и распространяется в спутном потоке окислителя в цилиндрическом канале при конечной химической скорости. Распределение скорости в выходном сечении сопла и в спутном потоке, также как начальные (при  $x=0$ ) распределения температуры и концентрации топлива и окислителя, будем считать заданными, равномерными, однородными. Полагается, что сопло с толщиной 0.5 мм выступает на 1 см к области расчета (рис. 1).



Рис. 1. Схема осесимметричной расчетной области

Параллельно с турбулентным перемешиванием двух течений происходит химическая реакция между взаимодействующими компонентами – горючим и кислородом из состава воздуха. Постепенно расширяется область перемешивания.

исследования процессов тепло-и массообмена. В первую очередь следует подобрать пригодную модель турбулентности для описания двухмерного течения с интенсивным химическим превращением.

**Математическая модель.** Большинство течений по природе своей имеют турбулентный характер и состояние турбулентности при движении среды сильно влияет на такие

Цель настоящего исследования заключается в моделировании процессов перемешивания, горения и распространения разных составов горючих смесей в цилиндрической камере, которая позволяет провести вычислительный эксперимент для

провести вычислительный эксперимент для

параметры течения, как перенос импульса, температуры и концентрации веществ в смеси. Общий вид системы уравнений, описывающих турбулентное течение многокомпонентного реагирующего газа, представлен далее. Система уравнений Навье–Стокса, включающая в себя законы сохранения массы, импульса, концентрации и энергии нестационарного пространственного течения, записана для декартовой системы координат:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \rho \bar{h}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{h}_s}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho (\bar{u}_i \bar{h}_s - \bar{u}_i \bar{h}_s)], \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i c_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_{eff}}{\sigma_{c_n, eff}} \frac{\partial c_n}{\partial x_i} \right) + S_n. \end{cases}$$

Тензор вязких сдвиговых напряжений определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\equiv \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad \tau_{ij} \equiv \overline{\rho u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j, \\ \rho (\bar{u}_i \bar{h}_s - \bar{u}_i \bar{h}_s) &= - \frac{\mu_{SGS} C_p}{Pr_{SGS}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}, \quad S_n = \sum \omega_n, \\ - \overline{\rho u'_i u'_j} &= \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где  $\mu_{eff}$  – суммарная динамическая вязкость.

Данная система замыкается следующими зависимостями:

$$h = c_p T + c_2 h_2^*, \quad c_p = \sum_{n=1}^N c_{pn} c_n.$$

В процессе решения задачи для описания турбулентности используются пять моделей турбулентности, которые ранее разными авторами реализованы при решении задач горения.

**Модель модифицированная  $k$ – $\varepsilon$ .** В отличие от работы [15] здесь для описания турбулентного обмена предлагается использовать модифицированную  $k$ – $\varepsilon$  модель [13–16], что способствует более адекватному описанию тепломассообменного процесса:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - 2 \rho \varepsilon M_i^2 + S_k, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{v \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}},$$

$$U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}\omega_k, \quad A_s = \sqrt{6} \cos \phi, \quad \phi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W), \quad W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3},$$

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad G_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad G_b = \beta g_i \frac{\mu_t \partial T}{\text{Pr}_t \partial x_i}, \quad \text{Pr}_t = 1/a_t,$$

$$a_0 = 1/\text{Pr} = k/\mu c_p, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}, \quad a = \sqrt{\gamma RT}.$$

Эмпирические константы  $k$ - $\varepsilon$  модели принимают стандартные значения:  $C_{1\varepsilon}=1.44$ ,  $C_{2\varepsilon}=1.9$ ,  $\sigma_k=1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon=1.2$ ,  $A_0=4.04$ .

**Модель Спаларта–Алмараса.** Эта модель относится к классу однопараметрических линейных моделей турбулентности. Здесь появляется только одно дополнительное дифференциальное уравнение для расчета кинематического коэффициента вихревой вязкости. Эта низкорейнольдсовая модель турбулентности, которая описывает всю область течения, определяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{v} u_i) = G_v + \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2\rho} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - C_{w1\rho} f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 + S_{\tilde{v}}.$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по формуле:  $\mu_t = \rho \tilde{v} f_{v1}$ , дополнительные определения даются следующими зависимостями:  $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}$ ,  $\chi = \frac{\tilde{v}}{v}$ ,

$$\tilde{S} = S + \frac{v}{k^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

$$f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} k^2 d^2}, \quad \text{а константы замыкания для модели: } C_{prod}=2.0, \quad C_{b1}=0.1355,$$

$$C_{b2}=0.622, \quad \sigma_{\tilde{v}} = \frac{2}{3}, \quad C_{v1}=7.1, \quad C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_{\tilde{v}}}, \quad C_{w2}=0.3, \quad C_{w3}=2.0, \quad k=0.4187.$$

**Стандартная модель  $k$ - $\varepsilon$ :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \\ C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon\rho} \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon. \end{cases}$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по формуле:  $\mu_t = \rho C_\mu k^2/\varepsilon$ , константы замыкания для стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели:  $C_{1\varepsilon}=1.44$ ,  $C_{2\varepsilon}=1.92$ ,  $C_\mu=0.09$ ,  $\sigma_k=1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon=1.3$ .

**Модель RNG  $k$ - $\varepsilon$  [15]:**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_\varepsilon \mu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon. \end{cases}$$

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по формуле  $\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$ , константы замыкания для RNG  $k-\varepsilon$  модели:  $C_\mu = 0.0845$ ,  $R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{\varepsilon^2}{k}$ ,  $\eta = Sk / \varepsilon$ ,  $\eta_0 = 4.38$ ,  $\beta = 0.012$ ,  $\eta \approx 3.0$ ,  $C_{2\varepsilon}^* \approx 2.0$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.42$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.68$ .

Модель  $k-\omega$  – это модель исторически самая первая высокорейнольдсовская модель с двумя дифференциальными уравнениями [15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \beta^* f_\beta k \omega + S_k, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + G_\omega - \rho \beta f_\beta \omega^2 + S_\omega. \end{cases}$$

Не содержит членов, отражающих влияние молекулярной вязкости на турбулентность. Сейчас применяется редко.

Турбулентная вихревая вязкость вычисляется по формуле:  $\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$ , модельные

константы определяются как функция  $\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$ ,  $\Gamma_\omega = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega}$ ,  $\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k} \right)$ ,

$\text{Re}_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$ ,  $G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} G_k$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + \text{Re}_t / R_\omega}{1 + \text{Re}_t / R_\omega} \right)$ ,

$\chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$ ,  $\beta^* = \beta_i^* [1 + \zeta^* F(M_t)]$ , константы замыкания для  $k-\omega$  модели:  $\alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}$ ,

$R_k = 6$ ,  $\beta_i = 0.072$ ,  $\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$ ,  $R_\omega = 2.95$ ,  $\alpha = \alpha_\infty = 1$ ,  $\beta_i^* = \beta_\infty^* \left( \frac{4/15 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_t / R_\beta)^4} \right)$ ,  $\zeta^* = 1.5$ ,  $R_\beta = 8$ ,

$\beta_\infty^* = 0.09$ ,  $\chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{ij} S_{ij}}{(\beta_\infty^* \omega)^3} \right|$ ,  $\beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta^* F(M_t) \right]$ ,  $M_t^2 \equiv \frac{2k}{a^2}$ ,  $M_{t0} = 0.25$ ,  $a = \sqrt{\gamma R T}$ ,  $\alpha_\infty^* = 1$

,  $\alpha_\infty = 0.52$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{9}$ ,  $\beta_\infty^* = 0.09$ ,  $\beta_i = 0.072$ ,  $R_\beta = 8$ ,  $R_k = 6$ ,  $R_\omega = 2.95$ ,  $\zeta^* = 1.5$ ,  $M_{t0} = 0.25$ ,  $\sigma_k = 2.0$ ,  $\sigma_\omega = 2.0$ .

Полная система уравнений Навье – Стокса с двумя нелинейными диффузионными уравнениями, учитывающих флуктуации средней скорости турбулентных потоков, представляет собой семейство моделей  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$ , где  $k$  – массовая плотность турбулентной энергии;  $\varepsilon$  – скорость ее диссипации;  $\omega$  – скорость диссипации энергии в единице объема и времени. Особенностью данной системы является каскадность ее решения, что наиболее удобно для применения в программных пакетах при моделировании процессов в цилиндрических координатах.

Здесь и далее  $u$ ,  $v$  – осредненные продольная и поперечная (радиальная) составляющие вектора скорости,  $\text{мс}^{-1}$  в цилиндрических координатах;  $\rho$ ,  $T$  – плотность,  $\text{кг м}^{-3}$  и абсолютная температура газовой смеси,  $\text{К}$ ;  $p$  – гидростатическое давление,  $\text{Па}$ ;  $Pr$ ,

$Sc_n$  – турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта;  $c_n$  – массовая концентрация  $n$ -го компонента газа в смеси,  $\text{кг кг}^{-1}$ ;  $\omega_n$  – массовая скорость образования или исчезновения  $n$ -го компонента газа,  $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $c_p = \sum_{n=1}^N c_{pn}c_n$  и  $c_{pn}$  – теплоемкости газовой смеси и  $n$ -го компонента при постоянном давлении,  $\text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $h_n^*$  – теплотворная способность  $n$ -го компонента,  $\text{Дж}\cdot\text{кг}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$ ;  $\nu$ ,  $\nu_t$  – кинематические коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкости,  $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$ .

Газовая смесь принимается совершенной, поэтому ее состояние удовлетворяет уравнению Менделеева–Клапейрона:

$$p = \rho R_0 T / m.$$

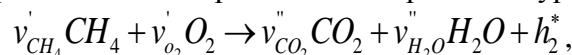
**Модель горения.** Отдельного внимания заслуживает вопрос моделирования источников в уравнениях энергии и переноса концентраций, связанных с протекающими в процессе горения химическими реакциями.

Коэффициент скорости прямой реакции по Аррениусу определяется следующим образом [15–20]:

$$\tilde{\omega}_2 = -A_{fk} n_1 n_2 \exp\left(-\frac{E_k}{R_0 T}\right),$$

где  $A_{fk}$  – предэкспоненциальный множитель;  $E_k$  – энергия активации.

В качестве горючего газа рассматривается метан, одностадийная кинетика горения которого в воздушной среде задается через стехиометрическое уравнение [17–19]:



где  $\dot{\nu}_{CH_4} = 1$ ,  $\dot{\nu}_{O_2} = 2$ ;  $\dot{\nu}_{CO_2} = 1$ ;  $\dot{\nu}_{H_2O} = 2$ .

Скорость реакции горения метана с кислородом в уравнении сохранения массы горючего, согласно предложениям работы [15], имеет вид

$$\tilde{\omega}_2 = -A_{r1} \frac{c_1 c_2 \bar{\rho}^2}{\bar{u}} \exp(-A_{r2} / T),$$

где  $A_{r1} = 8.6 \cdot 10^9$ ,  $\frac{E_a}{R} = 18.05 = A_{r2}$ .

**Алгоритм расчета.** Описанные выше уравнения интегрируются методом конечных объемов в пакете ANSYS Fluent. Конвективные и диффузионные потоки рассчитываются со вторым порядком аппроксимации. В связи с тем, что все моделируемые далее задачи квазистационарные, используется первый порядок аппроксимации по времени. Поля скорости и давления связываются алгоритмом PISO. Алгоритмы решения в зависимости от выбранной модели горения обладают отличительными особенностями.

**Результаты расчетов.** Задача решается в двумерной постановке, цилиндричность учитывается за счет расчетной сетки, построенной в виде сектора. Для упрощения изложения в разделе описания граничных условий здесь и далее параметры приводятся сразу как для flamelet модели, так и для моделей кинетической скорости реакции.

Граничные условия для расчетной области задаются следующим образом [15–20]:

$$r=0: \frac{\partial F}{\partial r} = 0, F = \{U, T, c_i, k, \varepsilon\}, \vartheta = 0 \text{ м/с};$$

$$r=R_0: \frac{\partial F}{\partial r} = 0, F = \{T, c_i, k, \varepsilon\}, \vartheta = 0 \text{ м/с}; u=0 \text{ м/с};$$

$$x=0: r < R_2: \vartheta = 0 \text{ м/с}; u = 82 \text{ м/с}; T = 300 \text{ К}, c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = 0; c_2 = 1;$$

$$x=0: R_2 < r < R_3: \frac{\partial F}{\partial x} = 0, F = \{T, c_i, k, \varepsilon\}, u = \vartheta = 0 \text{ м/с};$$

$$x=0: R_3 < x < R_4: \vartheta = 0, u = 0.6 \text{ м/с}, T = 300 \text{ К}, c_1 = 0.232, c_2 = c_3 = c_4 = 0; c_5 = 0.768.$$



Расчетная сетка сгущается в логарифмическом виде. Сеточная сходимость исследовалась на различных конечно–объемных сетках с неравномерным шагом:  $300 \times 100 \times 1$  (№1),  $50 \times 160 \times 1$  (№2),  $60 \times 200 \times 1$  (№3). Существенные отличия количественного характера в результатах наблюдаются при расчетах по сеткам №1 и №2. Однако при расчетах по сеткам №2 и №3 различия в распределении параметров малы. Поэтому основные расчеты проводятся на сетке  $50 \times 160 \times 1$ .

Нами проведены сравнения результатов расчета по представленным моделям турбулентности с экспериментальными данными из [15].

На рис. 2 представлены кривые осевой температуры газовой смеси, а на рис. 3 – кривые осевой массовой концентрации компоненты горения  $\text{CO}_2$ . Как видно из рис. 2–4, модифицированная  $k-\varepsilon$  модель турбулентности дает близкие к эксперименту результаты.

На рис. 4 приведено осевое распределение продольной скорости. Скачкообразное изменение скорости в начале расчетной области обусловлено наличием выступа сопла.

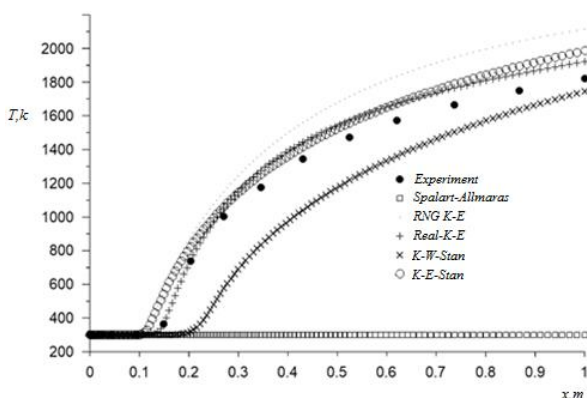


Рис. 2. Кривые осевой температуры

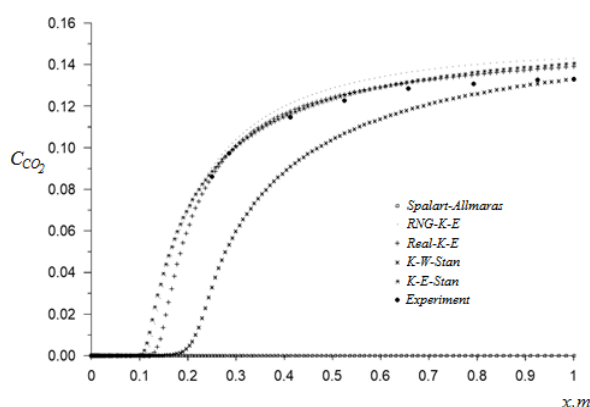


Рис. 3. Массовая концентрация компоненты горения  $\text{CO}_2$

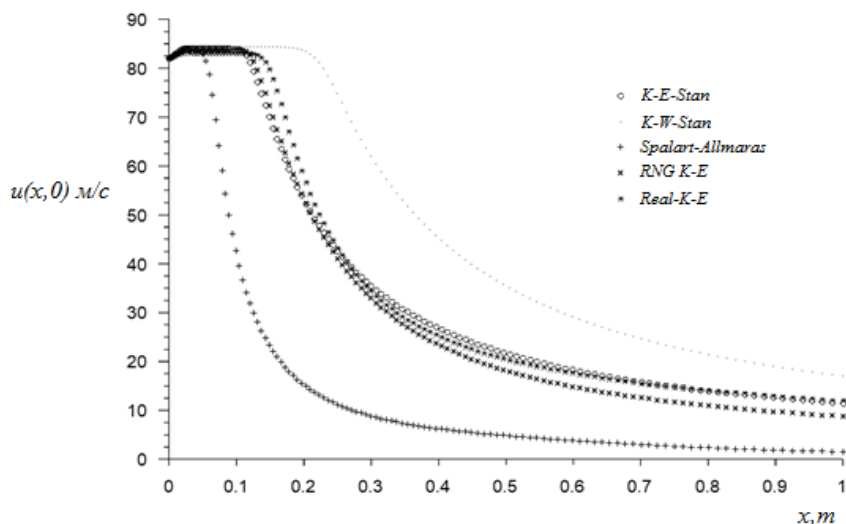


Рис. 4. Осевое распределение продольной скорости

**Заключение.** Полученные результаты в статье демонстрируют возможность применения программного комплекса ANSYS Fluent для проведения эффективного расчета процесса горения газа в энергетических установках. Так, по результатам сравнительного анализа экспериментальных данных и результатов программы пакета для пяти моделей турбулентности по осевой температуре и концентрации углекислого газа, представленных на рис. 2 и 3, можно отметить, что максимальная разность между значениями результатов математического моделирования и эксперимента не превышает 10% [15].

Анализируя результаты, можно заметить, что модифицированная  $k-\varepsilon$  модель более качественно совпадает с экспериментом, чем остальные четыре модели турбулентности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Vulis L.A., Ershin Sh.A., Yarin L.P.* Osnovy teorii gazovogo fakela [Fundamentals of the Gas Torch Theory]. L.: Energiya, 1968. 203 p. (In Russian).
- [2] *Abramovich G.N., Girshovich T.A., Krashennnikov A.S.*, Teoriya turbulentnykh struy. // The theory of turbulent jets. M.: 1984. 716 p.
- [3] *Tsuji H., Yamaoka I.* The structure of counterflow diffusion flames in the forward stagnation region of a porous cylinder // Proc. Combust. Ins, Vol.12. 1969. P. 997–1005.
- [4] *Barlow R.S., Karpets A.N., Frank J.H., Chien J.Y.* Scalar profiles and NO formation in laminar opposed-flow partially premixed methane/air flames // Combustion and flame, Vol. 127. 2001. P. 2102–2118.
- [5] *Peters N.* Laminar flamelet concepts in turbulent combustion. *Int. Symp. Combust.* 1988, №21, P. 1231–1250.
- [6] *Mitchell R.R., Sarofim A.F., Clomburg L.A.* Experimental and numerical investigation of confined laminar diffusion flames // Combustion and flame. Vol. 37. 1980. P. 227–244.
- [7] *Spalart P.R.* Strategies for turbulence modelling and simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2000, №21, P. 252–263.
- [8] *Sivathanu Y.R., Faeth G.M.* Generalized state relationships for scalar properties in nonpremixed hydrocarbon/air flames. *Combust. Flame.* 1990. №82. P. 211–230.
- [9] *Peters N.* Laminar flamelet concepts in turbulent combustion. *Int. Symp. Combust.* 1988. №21. P. 1231–1250.
- [10] *Deardorff J.W.* A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 1970. №41. P. 453–480.
- [11] *Pope S.B.* Turbulent Flows; Cambridge University Press: Cambridge. UK. 2000.
- [12] *Menter F., Kuntz M., Bender R.A.* Scale-adaptive simulation model for turbulent flow predictions // Proceedings of the 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, USA. 2003. 6–9 January.
- [13] *Spalart P.R.* Detached-eddy simulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2009. №41. P. 181–202.
- [14] *Жильцов Ю.В., Елиин В.В.* Моделирование процесса сжигания пылеугольного топлива в энергетическом котле БКЗ-500 с использованием программного комплекса ANSYS FLUENT // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование 2016. № 4 (52).
- [15] ANSYS Fluent Theory Guide. 2013 SAS IP // All rights reserved. Unauthorized use, distribution or duplication is prohibited. ANSYS, Inc. is certified to ISO 9001, 2008.
- [16] *Zhou X.* Численное моделирование турбулентного струйного течения и горения // Вычислительная техника и математика с приложениями. 1999. №38. С. 179–191.
- [17] *Zambon A.C., Chelliah H.K.* Self-sustained acoustic-wave interactions with counterflow flames // J. Fluid Mech. Vol. 560. 2006. P. 249–278.
- [18] *Hamdamov M., Mirzoyev A., Buriev E., Tashpulatov N.* Simulation of non-isothermal free turbulent gas jets in the process of energy exchange. E3S Web of Conferences, 2021. №264. P. 01017.
- [19] *Hamdamov M., Khujayev I., Bazarov O., Isabaev K.* Axisymmetric turbulent methane jet propagation in a wake air flow under combustion at a finite velocity. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering this link is disabled, 2021. 1030(1), 012163.
- [20] Boukhalfa Nora Chemical Kinetic Modeling of Methane Combustion // Procedia Engineering. 2016. №148. С. 1130–1136.

Дата поступления  
05.07.2022

**Ҳамдамов М.М., Ширинов З.З. Цилиндрик камерада ёниш жараёнларини ANSYS fluent пакет дастури орқали математик моделлаштириш**

**Аннотация:** Газ ёқилгисининг ёниши жараёнини математик моделлаштиришида асосий муаммо бу ANSYS Fluent пакет дастури орқали турбулент моделни танлашдир. Ушбу ишда цилиндрсимон камерада Аррениус қонуни ёрдамида метаннинг аралашини ва ёнишини тавсифлашда турбулентликни аниқлаш учун стандарт ва модификация қилинган  $k-\epsilon$  модели, Спаларт-Алларас модели,  $k-\omega$  модели ва RNG  $k-\epsilon$  моделлари сировдан ўтказилди. Ҳисоб ишларида тезлик ва босим майдонларини ўзаро боғлайдиган PISO алгоритмидан ва ўрнатилган ANSYS Fluent дастуридаги чекли ҳажм усулидан фойдаланилган. Олинган натижалар тажриба натижалари билан солиштирилди.

**Калим сўзлар:** турбулент оқим; компонентлар; кимёвий реакция тезлиги; умумий энтальпия; Аррениус қонуни; ANSYS Fluent; ҳисоблаш тажрибаси.

**Hamdamov M.M., Shirinov Z.Z. Mathematical modeling of processes in a cylindrical combustion chamber using the ANSYS fluent software package**

**Abstract:** The main problem of mathematical modeling of gas fuel combustion processes within the framework of the ANSYS Fluent software package is the choice of a turbulence model. As part of the study, to describe the turbulence phenomenon, the standard and modified  $k-\epsilon$  models, the Spalart-Allmaras model, the  $k-\omega$  model and the RNG  $k-\epsilon$  model were tested for describing the mixing and combustion of methane in a cylindrical chamber according to the Arrhenius law. The control volume method embedded in ANSYS Fluent was used in the calculations, where the velocity and pressure fields are linked by the PISO algorithm. A satisfactory agreement between the results of calculation and experiment was obtained when implementing the modified  $k-\omega$  model by the axial distribution of temperature and longitudinal velocity.

**Keywords:** turbulent flow; cylindrical chamber; components; chemical reaction rate; total enthalpy; Arrhenius law; ANSYS Fluent; control volume method; computational experiment.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ СЫРЦОВОГО ВАЛИКА ПО ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕДНЕГО ФАРТУКА КАМЕРЫ ДЖИНА

Парпиев А., Мардонов Б., Наврузов Н., Якубов К.

Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности, Ташкент, Узбекистан  
n.navruzov86@gmail.com

**Аннотация:** В статье приведены результаты теоретического исследования работы пильного джина. Показано влияние скорости вращения и силы межслойного давления сырцового валика на качественные показатели процесса дженирования. Изучена динамика движения сырцового валика в рабочей камере пильного джина.

**Ключевые слова:** хлопок-сырец; процессы дженирования; рабочая камера; плотность сырцового валика; межслойное давление; семенная гребенка; трение; разрыхленность.

**Введение.** Сложность процесса дженирования определяется большим многообразием протекающих в нем явлений. Трудными для наших ученых вскрыты многие элементы процесса дженирования, к числу которых можно отнести такие, как исследование кинематики движения сырцового валика, его фракционного состава и зональной плотности, исследование механизма выпадения семян, съём волокна, связи качественных и количественных показателей процесса, влияние их на свойства перерабатываемого сырья и режима работы джина на протекание процесса [1].

Рабочий процесс пильного джина происходит в рабочей или так называемой сырцовой камере джина. Эта камера представляет собой цилиндр с сечением сложной конфигурации. В камеру непосредственно поступает хлопок-сырец более или менее равномерным потоком попадает на пилы джина. Летучки постепенно оголяются, волокно уносится пилами, а оголенные семена выходят через семенную гребенку, которая установлена в нижней части камеры.

Н.Г. Гулидов [2] в своей работе пришел к выводу, что увеличение поперечного сечения рабочей камеры до определенного предела может повысить производительность джина, но дальнейшее увеличение этого сечения не рационально по следующим причинам. С увеличением размеров камеры семенная гребенка опускается и при среднем поджатии гребенки остаточная волокнистость семян будет повышенной. Поджатие гребенки несколько уменьшает остаточную волокнистость семян, но создаст более резкий поворот для массы валика при подходе ее к пилам и тормозит движению валика, происходят частые забои, что не обеспечивает бесперебойного движения валика, а вместе с тем и работы джина.

Б.А. Левкович [3, 4] показал, что производительность джина является возрастающей функцией скорости сырцового валика. Действительно, с увеличением скорости сырцового валика увеличивается и производительность джина. Многими исследователями велись работы в этом направлении в двух вариантах:

1) естественным образом, т.е. путем изменения формы поперечного сечения камеры и ее объёма;

2) путем принудительного вращения сырцового валика. Говоря о форме профиля камеры, следует заметить, что она должна быть такой, чтобы оказывать минимальное сопротивление вращению сырцового валика, т.е. не имеет резких уступов и должна приближаться к форме окружности. Однако последнее требование трудно выполнимо, так как в зоне приемной горловины должен быть предусмотрен клиновидный зев для восприятия поступающего хлопка-сырца от питателя, а в зоне семенной гребенки должно быть выполнено клиновое пространство для лучшего разряжения сырцового валика с целью выделения отдженированных семян.

Касаясь объёма камеры, следует указать, что с увеличением площади поперечного сечения камеры, т.е. с увеличением объёма рабочей камеры и массы сырцового валика улучшаются условия энергопередачи вращения валику от пильного цилиндра (благодаря увеличению давления сырцового валика на пильный цилиндр). Разумеется, увеличение объёма камеры при неизменном диаметре пил возможно лишь до определенного предела, с

переходам которого из-за чрезмерного роста сил сопротивления вращению сырцового валика о стенки камеры, скорость последнего будет уменьшаться. Эти положения подтверждены многими исследователями [5, 6].

Для анализа теоретические исследования вышеуказанной ситуации было изучено движение хлопка в рабочей камере джина.

**Постановка задач.** Форму внутренней поверхности переднего фартука камеры принимаем в виде цилиндра радиусом  $R$ . Вдоль этой поверхности совершает движение хлопок-сырец, равномерно распределенный вдоль оси цилиндра. Если направить ось  $OZ$  вдоль оси цилиндра, то движение потока достаточно изучить в плоскости  $Z=\text{const}$ , которая даст уравнение окружности радиуса  $R$  (рис.1,а).

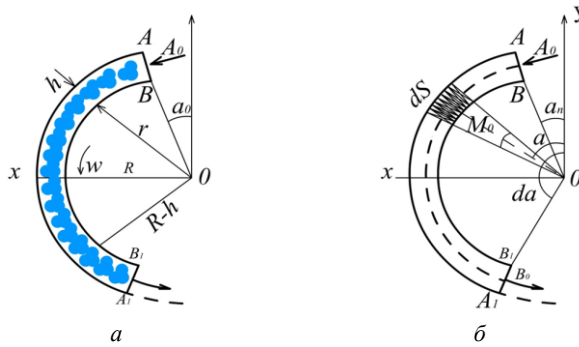


Рис.1. Движения слоя потока по поверхности переднего фартука камеры (а) и расчетная схема определения скорости элемента  $ds$  (б)

(рис.1,а).

Толщину движущегося потока обозначим  $h$ , расстояние от центра цилиндра – через  $R$ , при этом скорость потока во внутренней границе потока  $r=R-h$ , расстояние равно скорости сырцового валика  $v_6=\omega_6 R$ , где  $\omega_6$  – угловая скорость сырцового валика. Согласно работе [7], она может быть равной  $\omega_6=\omega/5 \div \omega/4$ , где  $\omega$  – угловая скорость пильных дисков. Скорость по-

дачи хлопком-сырцом в сечении слоя АВ считаем равной  $v_n$  слой потока – достаточно малой величиной, т.е. полагаем  $h < R$  и ограничиваемся рассмотрением движения потока вдоль дуги  $A_0B_0$ . Движение потока считаем стационарным. Направим ось  $OY$  вертикально вверх, а ось  $OX$  перпендикулярно к ней. Обозначим через  $v, p, \rho$  – скорость, давление и плотность в произвольной точке дуги  $S=R\alpha$ , отсчитываемой с точки  $A_0$ , где  $\alpha$  – угол между осью  $OY$  и радиусом  $R_0 = \sqrt{OM_0}$ . Выделим из потока элемент  $ds=Rda$ , считая движение потока стационарным, и составим уравнение Эйлера относительно давления:

$$\rho v \frac{dv}{ds} = -\frac{dp}{ds} + \rho g (\sin \alpha - f \cdot q \cdot \cos \alpha) - f \frac{v^2}{R} \rho, \quad \alpha_0 < \alpha < \alpha_1, \quad (1)$$

где  $\alpha_0, \alpha_1$  – начальный и конечный углы переднего фартука;  $f$  – коэффициент трения между сырцом и поверхностью фартука;  $q = \text{sign}(v_6 - v)$  – функция, зависящая от знака разности  $v_6 - v$ :  $q=1$ : при  $v_6 > v$ ;

$$-1 < q < 1 \text{ при } v_6 = v; \quad q = -1; \text{ при } v_6 < v; \quad v_6 = \omega_6 R.$$

Уравнение (1) содержит три неизвестных: давление  $p$ , плотность  $\rho$  и скорость потока  $v$ .

Для замыкания уравнения (1) принимаем следующие условия: условия стационарности потока

$$\rho \cdot v \cdot h \cdot L = \rho_0 \cdot v_0 \cdot h \cdot L = Q. \quad (2)$$

Здесь  $\rho_0, v_0$  – плотность и скорость потока в сечении  $AB$ ;  $L$  – длина цилиндра;  $Q$  – расход сырца.

Поток хлопком-сырцом моделируем, считая его сплошной средой. Уравнение состояния каждой из них определяется зависимостью между давлением и плотностью

$$\rho = \rho_0 [1 + A(p - p_0)]. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) при  $A(p - p_0) \ll 1$  установим

$$v = \frac{v_0}{1 + A(p - p_0)} \approx v_0 [1 - A(p - p_0)], \quad (4)$$

где  $p_0$  – давление в сечении  $AB$ ;  $A$  – опытная постоянная, обратная модулю сжатия хлопком-сырца  $K=1/A$ . Пользуясь равенствами (2) и (3), уравнение (1) записываем относительно скорости потока:

$$\frac{d\bar{v}}{d\alpha} = \frac{gR}{c^2} \frac{v(\sin \alpha - f \cdot q \cdot \cos \alpha)}{(\bar{v}^2 - 1)} - \frac{f \cdot \bar{v}^3}{\bar{v}^2 - 1}, \quad (5)$$

где  $\bar{v} = v/c$ ,  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 A}} = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ .

Уравнение (4) является нелинейным относительно  $v(\alpha)$ . Согласно работе [8], в точках  $A$  и  $D$  дуги слоя  $AD$  скорость сырцового валика будет равна  $v_A = v_0 = 0.9 \div 1.1$  м/с,  $v_D = 1.5 \div 1.8$  м/с. При этом для  $\rho_0 = 40$  кг/м<sup>3</sup> в интервале  $800 < K < 2000$  имеем  $\bar{v}_A = 0.12 \div 0.18$ ,  $\bar{v}_D = 0.17 \div 0.26$ . В этих условиях, можно полагать,  $\bar{v}^3 \approx 0$ ,  $q=1$ . При  $\bar{v} < 1$  уравнение (4) приведем к линейному виду

$$\frac{d\bar{v}}{d\alpha} = -\bar{v}a(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (6)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющего условию  $\bar{v}(\alpha_0) = \bar{v}_A$ , имеет вид

$$\bar{v} = \bar{v}_0 \exp[a(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) + f(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)]. \quad (7)$$

По известной скорости потока из формулы (2) определяем плотность потока

$$\rho = \rho_0 v_0 / v.$$

На рис. 2 представлены кривые распределения скорости  $v$  (м/с) (рис. 2,а) вдоль и плотности  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>) слоя сырца для различных значений коэффициента объемного сжатия сырца  $K=1/A$ . В расчетах принято:  $v_0=1$  м/с,  $\alpha_0=15^\circ$ ,  $\alpha_n=120^\circ$ ,  $f=0.3$ ,  $R=0.2$  м.

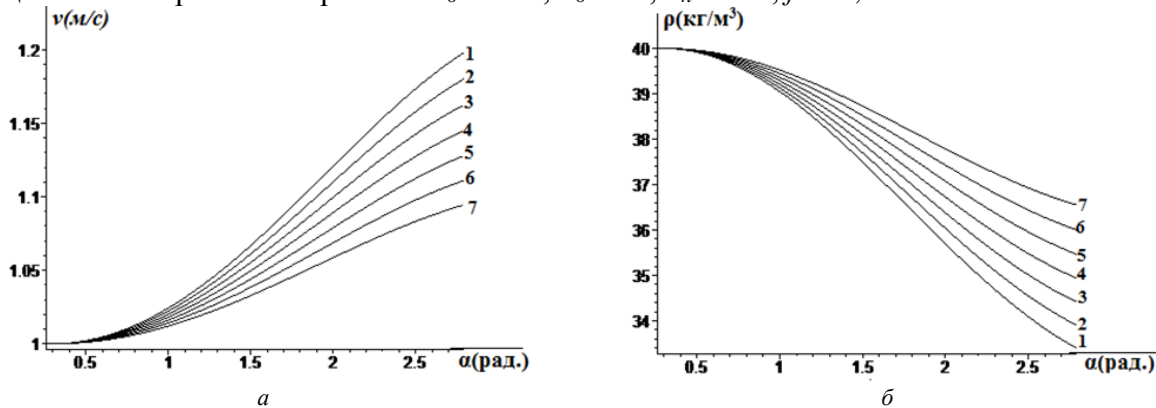


Рис.2. Распределение скорости  $v$  (а) и плотности  $\rho$  (б) слоя сырца вдоль дуги фартука для различных значений модуля объемного сжатия сырца  $K$ , Па: 1- $K=833$ ; 2- $K=910$ ; 3- $K=1000$ ; 4- $K=1250$ ; 5- $K=1429$ ; 6- $K=1667$ ; 7- $K=2000$

**Определение частных решений.** Из анализа представленных на рис.2 кривых следует, что с ростом модуля объемного сжатия  $K$  скорость потока уменьшается. Это указывает на возможность повышения скорости потока путем разрыхления сырца в зоне подачи. Для выбранных параметров задачи неравенства  $v < v_B$  по всей линии контакта выполняются, поэтому принятое условие  $q=1$  соблюдается. С уменьшением модуля сжимаемости  $K$  скорость слоя может достичь скорости потока и согласно вышеприведенным данным сила трения начинает тормозить движение потока и поэтому интенсивность роста скорости будет уменьшаться, как только скорость потока в некоторой точке контактной дуги достигает скорости валика  $v < v_B$ . Обозначим через  $\alpha < \alpha_*$  полярный угол этой точки, который определяется из уравнения

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 \exp[a(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_*) - f(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_*)]. \quad (8)$$

Корни этого уравнения должны удовлетворять условию  $\alpha_* \leq \alpha_m$ . В таблице представлены корни уравнения (8) при различных значениях модуля объемного сжатия сырца  $K$  (Па) и коэффициента трения  $f$ . В расчетах принято  $v_0=1$  м/с,  $v_B=1.4$  м/с,  $\alpha_0=15^\circ$ ,  $\alpha_1=160^\circ$ .

Корни уравнения (7)  $\alpha_*$  радиан для различных значений  $K$  и  $f$

$K$ , Па	800	667	571	500	444	400	364	333	307	286
$\alpha_*$ (рад.), $f=0.3$	2.70	2.33	2.11	1.95	1.83	1.74	1.64	1.59	1.53	1.48
$\alpha_*$ (рад.), $f=0.4$	2.73	2.40	2.20	2.05	1.93	1.84	1.76	1.70	1.64	1.60

При  $\alpha > \alpha_*$  в интервале углов  $\alpha_* \leq \alpha \leq \alpha_m$ , полагая  $\bar{v} = \bar{v}_1(\alpha)$  и  $q = -1$ , уравнение (5) представим в виде

$$\frac{d\bar{v}_1}{d\alpha} = -\bar{v}_1 a (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (9)$$

Решение уравнения (8), удовлетворяющего условию  $\bar{v}_1(\alpha_*) = \bar{v}(\alpha_*)$ , имеет вид

$$\bar{v}_1 = \bar{v}(\alpha_*) \exp[a(\cos \alpha_* - \cos \alpha) - f(\sin \alpha_* - \sin \alpha)].$$

На рис. 3, 4 представлены кривые распределения скорости и плотности потока для двух значений коэффициента трения при различных значениях модуля всестороннего сжатия  $K$  по дуге охвата переднего фартука.

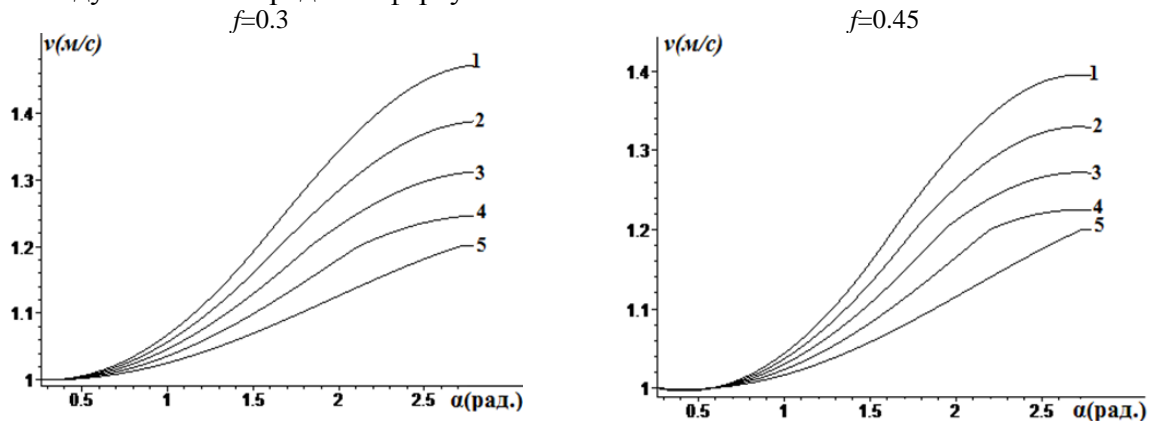


Рис.3. Изменение скорости летучки по дуге переднего фартука пыльного джина при различных значениях коэффициента  $f$  и  $x$  модуля объемного сжатия  $K$ , Па: 1- $K=307$ ; 2- $K=364$ ; 3- $K=444$ ; 4- $K=571$ ; 5- $K=800$

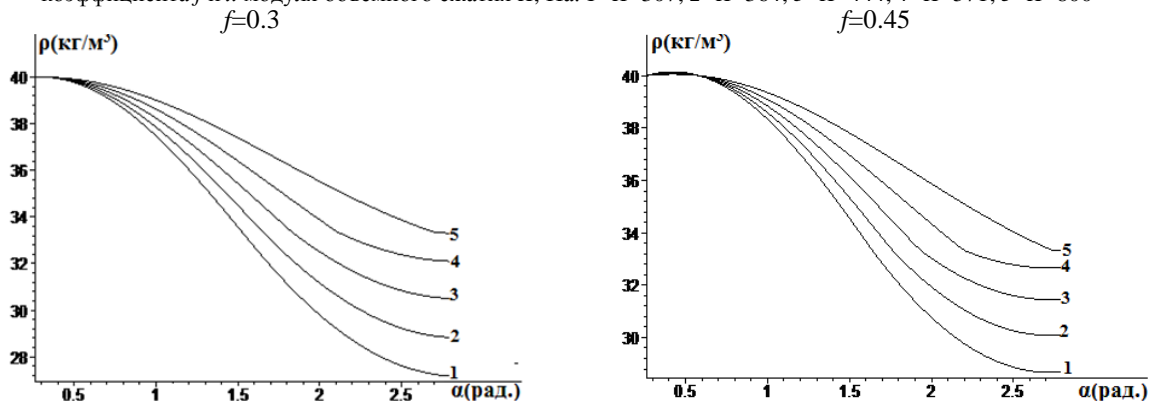


Рис.3. Изменение плотности потока по дуге переднего фартука пыльного джина при различных значений коэффициента  $f$  и  $x$  модуля объемного сжатия  $K$ , Па: 1- $K=307$ ; 2- $K=364$ ; 3- $K=444$ ; 4- $K=571$ ; 5- $K=800$

Из сравнительного анализа кривых, представленных на рис. 3 и 4, можно отметить, что с уменьшением модуля сжатия, указывающего на рост разрыхленности сырья, вдоль линии контакта сырья с поверхностью фартука скорость сечений слоя может достичь скорости валика и далее по дуге контакта она увеличивается, причем в сечении выхода слоя из зоны фартука скорость потока достигает максимальное значение. При этом происходит заметное снижение интенсивности уменьшения плотности потока.

**Заключение.** Теоретические исследования показали, что с увеличением подачи хлопка-сырца в рабочую камеру с увеличением производительности джина увеличиваются масса сырцового валика и его плотность. Разумеется, с увеличением подачи хлопка-сырца растут плотность сырцового валика и распорные усилия на стенки рабочей камеры, оказывающие тормозящее воздействие на его вращение. Наименьшая скорость сырцового валика возникает тогда, когда центробежная сила и сила тяжести достигают максимума.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пахтани дастлабки ишлашни мувофиқлаштирилган технологияси (ПДИ 30-75-2017).
- [2] Тиллаев М. Аррали жин ишчи камерасининг рационал вариантыни яратиш // Тўқимачилик муаммолари илмий-техникавий журналы. 2010. №4. 12-14 Б.

- [3] Мардонов Б.М., Тиллаев М.Т., Туйчиев Т.О. Арра тишлари билан толани илаштиришни тадқиқоти // Тўқимачилик муаммолари илмий-техникавий журнали. 2012. №4. 55-57 Б.
- [4] Azimjon Parpiyev, Ilkhom Sabirov, Alisher Usmankulov, Nodir Navruzov "Study of the Influence of Main of the Regenerator Ginning Machine on the Qualitative Indicators of the Fibers and Seeds" E3S Web of Conferences ICECAE2021. P.304.
- [5] Parpiyev A., Navruzov N. The analysis of residual fib ration of seeds after saw ginning. European Science Review. P.253–258.
- [6] Парпиев А., Наврузов Н., Якубов К. Анализ остаточного волокна дженированных семян хлопчатника // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации. – 72 с.
- [7] Parpiyev A., Navruzov N. Improvement of Saw Ginning. J. Advanced Research in Science, Engineering and Technology. 2018. 5. 9.
- [8] Парпиев А., Собиров И.К., Наврузов Н.А. Выбор основных параметров джина–регенератора волокнистых отходов // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации. С. 106–111.

Дата поступления  
07.10.2022

**Парпиев А., Мардонов Б., Наврузов Н., Якубов К. Пахта хомашё валигининг жин ишчи камераси олд фартук юзасида ҳаракатланиш жараёнини моделлаштириши**

**Аннотация:** Мақолада аррали жинлаш машинасининг ишлаш жараёни ва хомашё валигининг айланиш тезлиги, қатламлараро босим кучининг пахта хомашёсини жинлаш жараёнининг сифат кўрсаткичларига таъсири тўғрисида назарий тадқиқотлар олиб борилган. Шу билан бир қаторда хомашё валигининг жин ишчи камерасидаги ҳаракат динамикаси ўрганилган.

**Калим сўзлар:** пахта хомашёси; жинлаш жараёни; ишчи камера; хомашё валигининг зичлиги; қатламлараро босим; жин чигит тароғи; ишқаланиш; титилганлик.

**Parpiyev A., Mardonov B., Navruzov N., Yakubov K. Simulation of the process of movement of a raw-cotton roll on the surface of the front apron of the gin chamber**

**Abstract:** Theoretical studies of the operation of the saw gin and the influence of the rotation speed and the force of the interlayer pressure of the raw-cotton roll on the quality indices of the ginning processes are conducted in the article. The dynamics of the movement of the raw-cotton roll in the working chamber of the saw gin is studied.

**Keywords:** raw cotton; ginning processes; working chamber; raw-cotton roll density; interlayer pressure; seed comb; friction; looseness.

УДК 635-133

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЕМЯН МЕЛКОСЕМЕННЫХ ОВОЩНЫХ КУЛЬТУР ПО НАКЛОННОМУ ЛОТКОВИДНОМУ СЕМЯПРОВОДУ

**Эргашев Ш.Т., Рустамов Р.М., Турдалиев В.М., Юлдашев М.А.**

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан  
E-mail: vox-171181@mail.ru

**Аннотация:** В статье кратко проанализировано влияние качества посева на урожайность при выращивании овощных культур и приведены основные факторы, влияющие на посев. Представлены результаты теоретического исследования движения семян мелкосеменных овощных культур в лотковидном семяпроводе. В проведенных исследованиях семена рассматривались как материальная точка, а семяпровод – как наклонная плоскость, получено аналитическое выражение, представляющее силу трения, позволяющую семенам перекатываться. Получено выражение, определяющее предельное значение коэффициента трения, которое обеспечивает семенам катиться или скользить. На основе численного решения полученных аналитических выражений построены графические зависимости времени накатывания семян на семенной лоток и коэффициента предельного трения от коэффициента, учитывающего форму семян.

**Ключевые слова:** семена; посев; семяпровод; движение; трение; форма; качение; скольжение; наклон.

**Введение.** В общем комплексе операций возделывания сельскохозяйственных культур посев имеет важное значение. Своевременное и качественное выполнение посева позволит повысить урожайность и качество продукции, снизить трудовые и другие затраты. Качество посева обеспечивается размещением семян на уровне заданных требований и оптимальным количеством кустов для каждого растения. При этом учитывается не только продуктивность растения, но и общий урожай, а также оптимальное распределение четырех жизненно важных факторов (света, тепла, воды и воздуха) между растениями. В зависимости от этого выбираются расстояния между рядами и между растениями.

Можно отметить, что способ посева решает следующие основные задачи: равномерное размещение семян по площади питания, равномерная заделка посевов и создание условий для комплексной механизации возделывания сельскохозяйственных культур. Равно-



мерное распределение семян и развитие всходов зависит от оптимальных технологий и способов посева. Способы посева зависят не только от размера семян и площади питания, но и от правильного выбора типов посевных машин, устройства новых конструкций [1, 2].

Равномерность распределения посевного материала по семяпроводам является одним из наиболее важных показателей, которым определяется качество проведения посева сельскохозяйственных культур. Равномерность распределения во многом зависит от конструктивных и технологических параметров, используемых на посевной машине делительных головок [3].

Судить о равномерности высева семян только по равномерности зерновой струи, выходящей из аппарата, недостаточно, ибо при перемещении по семяпроводу и сошниковой трубке семена несколько изменяют взаимное положение. С помощью семяпровода происходит выравнивание струи, если она из выбрасывающего аппарата выходит неравномерно [4]. Семяпроводы сеялок выполняют функцию транспортирования семян от высевających аппаратов к сошникам. При этом они преобразуют поток семян и тем самым изменяют его характеристики. Следовательно, семяпроводы влияют на равномерность высева.

При изучении равномерности высева семян [5] было установлено, что из-за сложности и неразрывности технологического процесса статика внутренних процессов работы отдельных элементов технологии очень неполная. Чаще всего исследователи обращают внимание на выходные показатели работы сеялок – равномерность заделки семян, неравномерность высева между высеваящими аппаратами, общая неравномерность высева, распределение семян по площади питания и др. Особенно мало сведений о работе семяпроводов. В то же время этот элемент работает в наиболее сложных условиях, так как угол наклона его к горизонту и длина постоянно изменяются, что, несомненно, оказывает влияние на формирование потока семян, подводимого к сошниковой группе.

**Методы.** Так как масса и размер семян мелкосеменных овощных культур очень малы, поэтому необходимо отыскать такую траекторию движения семян, которая обеспечивала бы наименьшее время, затрачиваемое на преодоление расстояния между высеваящим аппаратом и сошником или с почвой, а также их равномерное распределение по зоне высева. Для проведения исследований влияния параметров по наклонной лотке на перемещение семян мелкосеменных овощных культур использован закон классической механики (рис. 1). В задачу исследования входило рассмотрение порядка распределения семян на лотке и определение предельного коэффициента трения.

При исследовании движения семян по наклонной лотке изучали по схеме, представленной на рис. 1.

Согласно второму закону Ньютона, отношения между силами в представленной схеме на рис. 1 записывается следующим образом:

$$\bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{mp} + \bar{F}_{cn} = m\bar{a}, \quad (1)$$

где  $G$  – сила тяжести, Н;  $N$  – нормальная реакция, Н;  $F_{mp}$  – сила трения, Н;  $F_{cn}$  – сила сопротивления среды (воздуха), Н;  $m$  – масса семян, кг;  $a$  – ускорение, м/с<sup>2</sup>.

После проецирования уравнения (1) на оси  $x$  и  $y$  по оси  $x$ :

$$G \sin \alpha - F_{mp} - F_{cn} = m\ddot{x}, \quad (2)$$

по оси  $y$ :

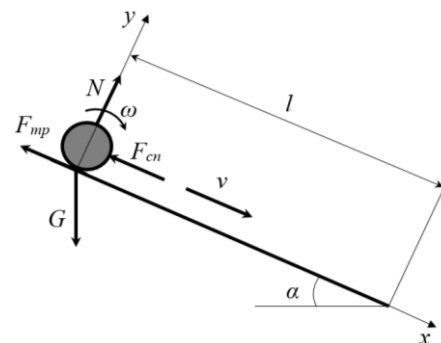


Рис. 1. Схема для исследования движения семени по наклонной плоскости



$$-G \cos \alpha + N = 0. \quad (3)$$

Если рассматривать, что семя катится по наклонной плоскости, то было бы ошибкой выражать силу трения с помощью формулы Кулона–Амонтона. Это потому, что формула верна для процесса трения скольжения. Поэтому сила трения при качении определялась следующим образом. Согласно схеме на рис. 1, единственной силой, заставляющей вращаться семена, является сила трения. Следовательно, момент силы трения выражается следующим образом:

$$M_{mp} = F_{mp} r, \quad (4)$$

где  $r$  – радиус семян, м.

Если учесть момент инерции семени, тогда:

$$M_{mp} = J \varepsilon, \quad (5)$$

где  $J$  – момент инерции семени, кгм<sup>2</sup>;  $\varepsilon$  – угловое ускорение, 1/с<sup>2</sup>.

Момент инерции семени выражается следующим образом:

$$J = k m r^2, \quad (6)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий форму семени.

Учитывая выражение (6), выражения (4) и (5), выравнивая, получим

$$F_{mp} r = k m r^2 \varepsilon.$$

Из этого уравнения находим силу трения

$$F_{mp} = k m r \varepsilon. \quad (7)$$

Если учесть, что линейное ускорение семени равно  $\ddot{x} = r \varepsilon$ , то выражение (7) выглядит так:

$$F_{mp} = k m \ddot{x}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (2), определяющее силу трения (7), тогда

$$G \sin \alpha - k m \ddot{x} - F_{cn} = m \ddot{x}. \quad (9)$$

Учитывая, что сила тяжести  $G = mg$  и сила сопротивления воздуха  $F_{cn} = \frac{1}{2} \mu \zeta S v_c^2$  [6],

уравнение (9) можно записать в виде

$$mg \sin \alpha - k m \ddot{x} - \frac{1}{2} \mu \zeta S \dot{x}^2 = m \ddot{x}, \quad (10)$$

где  $\mu$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  $\zeta$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $S$  – площадь фронтальной проекции семян, м<sup>2</sup>;  $\dot{x}$  – скорость движения семян относительно воздуха, м/с.

Разделив две части на  $m$  уравнения (10), получим

$$g \sin \alpha - k \ddot{x} - \frac{1}{2m} \mu \zeta S \dot{x}^2 = \ddot{x}. \quad (11)$$

Для удобства решения задачи добавим заметку  $\frac{\mu \zeta S}{2m} = A^2$  (где  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ ). После этого

из выражения (11) определим ускорение при трения качения:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{g \sin \alpha - A^2 \dot{x}^2}{k + 1}. \quad (12)$$

Из уравнения (12) определим  $dt$

$$dt = \frac{d\dot{x}(k + 1)}{g \sin \alpha - A^2 \dot{x}^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$\int \frac{d\dot{x}(k+1)}{g \sin \alpha - (A\dot{x})^2} = t + \ln C_1. \quad (14)$$

Согласно [7], с учетом того  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$ , что (14) принимает вид:

$$\frac{(k+1)}{2\sqrt{g \sin \alpha}} \ln \frac{\sqrt{g \sin \alpha} + A\dot{x}}{\sqrt{g \sin \alpha} - A\dot{x}} = t + \ln C_1, \quad (15)$$

$$\ln \frac{\sqrt{g \sin \alpha} + A\dot{x}}{\sqrt{g \sin \alpha} - A\dot{x}} = \frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t + \ln C_2, \quad (16)$$

$$\frac{\sqrt{g \sin \alpha} + A\dot{x}}{\sqrt{g \sin \alpha} - A\dot{x}} = C_2 e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t}, \quad (17)$$

$$A\dot{x} \left( 1 + C_2 e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} \right) = C_2 \sqrt{g \sin \alpha} e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} - \sqrt{g \sin \alpha}, \quad (18)$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{A} \cdot \frac{\left( C_2 e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} - 1 \right)}{\left( C_2 e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} + 1 \right)}, \quad (19)$$

или

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{A} \cdot \frac{\left( e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} - C_2 \right)}{\left( e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} + C_2 \right)}. \quad (20)$$

Согласно начальным условиям,  $x=0$  при  $t=0$  и, где  $C_2=1$ . Поэтому запишем уравнение (20) следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{A} \cdot \frac{\left( e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} - 1 \right)}{\left( e^{\frac{2\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} + 1 \right)}. \quad (21)$$

Для упрощения решения задачи умножим обе части уравнения (21) на  $e^{-\frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t}$ . В этом случае

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{A} \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} - e^{-\frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t}}{e^{\frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t} + e^{-\frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t}}. \quad (22)$$

Если учесть гиперболические функции, то  $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  и

$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  [8, 9]. После этого, определяем скорость семян вдоль оси  $x$ :

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{A} \cdot th \left( \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{k+1} t \right). \quad (23)$$

С учетом уравнений (12) и (23) выразим силу трения качения следующим образом:

$$F_{mp}^o = \frac{mg \sin \alpha \left( 1 - th^2 \left( \frac{\sqrt{\mu \zeta S g \sin \alpha}}{2m(k+1)} t \right) \right)}{(1+k)}. \quad (24)$$

Как отмечалось, когда сила трения равна формуле Кулона–Амонтона

$$F_{mp}^c = fN, \quad (25)$$

тогда семена начинают проскальзывать.

Если учесть, что из (3)

$$N = mg \cos \alpha, \quad (26)$$

тогда сила трения при скольжении равна

$$F_{mp}^c = fmg \cos \alpha. \quad (27)$$

В следующих исследованиях определяем предельное значение коэффициента трения, при котором семена могут катиться или скользить. При этом в выражении (24) предполагается, что силы трения в качении равны силам трения в выражении (27), а предельный коэффициент трения обозначается через  $f^*$  и находится следующим образом:

$$\frac{mg \sin \alpha \left( 1 - th^2 \left( \frac{\sqrt{\mu \zeta S g \sin \alpha}}{2m(k+1)} t \right) \right)}{(1+k)} = f^* mg \cos \alpha. \quad (28)$$

После нескольких операций над уравнением (28) коэффициент предельного трения можно выразить следующим образом:

$$f^* = \frac{tg \alpha \left( 1 - th^2 \left( \frac{\sqrt{\mu \zeta S g \sin \alpha}}{2m(k+1)} t \right) \right)}{(1+k)}. \quad (29)$$

**Результаты.** Итак, в заключение следует отметить, что если выполняется условие  $f^* = f$ , то семена перемещаются с проскальзыванием. Если выполняется условие  $f^* > f$ , то семена перемещаются с прикатыванием.

Для определения зависимости времени скатывания семян по наклонному лотку от коэффициента трения проведем численное решение уравнения (29). Численное решение уравнения (29) проведено при следующих значениях параметров:  $m=0.004$  кг;  $\mu=0.25$ ;  $k=0.5$ ;  $\zeta=1.5$  кг/м<sup>3</sup>;  $S=0.0005$  м<sup>2</sup>;  $g=9.8$  м/с<sup>2</sup>;  $\alpha=(30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$ ;  $t \in [0; 1]$  (рис. 2).

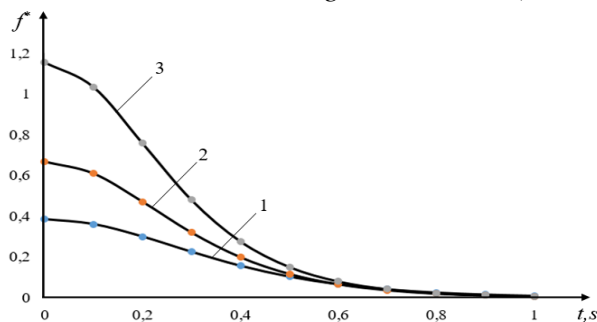


Рис. 2. Закон изменения предельного значения коэффициента трения в зависимости от времени перемещения семян: 1– $\alpha=30^\circ$ ; 2– $\alpha=45^\circ$ ; 3– $\alpha=60^\circ$

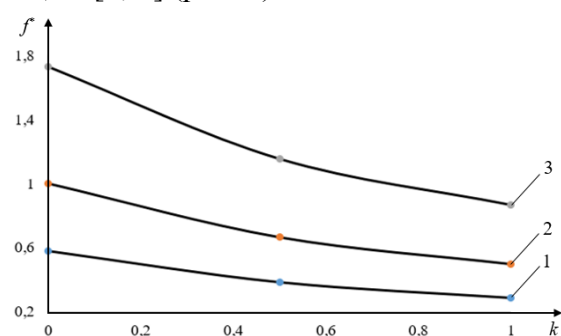


Рис. 3. Графические зависимости изменения предельного коэффициента трения от коэффициента учета формы семян: 1– $\alpha=30^\circ$ ; 2– $\alpha=45^\circ$ ; 3– $\alpha=60^\circ$

Из рис. 2 видно, что предельное значение коэффициента трения уменьшается по нелинейному закону с увеличением времени скатывания семян. При этом с увеличением угла наклона семяпровода увеличивается и предельное значение коэффициента трения.

Из рис. 3 видно, что предельный коэффициент трения, обеспечивающий скатывание семян по семяпроводу, криволинейно уменьшается с увеличением коэффициента, учитывающего форму семян. Например, при угле наклона семяпровода 300 и значении коэффициента, учитывающего форму семян от 0 до 1, предельный коэффициент трения уменьшается от 0.577 до 0.2885 по криволинейной закономерности. При угле наклона семяпровода 600 и значении коэффициента, учитывающего форму семян от 0 до 1, предельный коэффициент трения уменьшается от 1.72993 до 0.86496.

**Заключение.** Теоретические исследования показывают, что для скольжения семян по плоскому лотку должно выполняться условие  $f^* = f$ , а для того, чтобы они катились, должно выполняться условие  $f^* > f$ . Кроме того, с увеличением значения коэффициента, учитывающего форму семени, увеличивается сила трения при качении, время падения семени и значение предельного коэффициента трения. Однако было установлено, что увеличение угла наклона семяпровода отрицательно влияет на коэффициент трения и положительно влияет на время падения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петровец В.Р., Курзенков С.В., Дудко Н.И., Греков Д.В. Математическая модель уплотнения почвы в бороздках, образованных однодисковым сошником с нулевым углом атаки и симметрично расположенными двухсторонними ребордами-бороздообразователями для узкорядного посева мелкосемянных культур // Вестник Белорусской государственной сельскохозяйственной академии. 2016. № 4. С. 98–100.
- [2] Chernovolov V.A., Kravchenko L.V., Kravchenko A.Yu., Nesmiyan V.I. Rational parameter calculation method for devices with horizontal rotation axis to disseminate mineral fertilizers and seeds // AMAZONIA INVESTIGA. 2018. № 7. P. 670–675.
- [3] Пятаев М.В., Зырянов А.П. Определение рациональных параметров делительных головок пневматической зерновой сеялки // Вестник КрасГАУ. 2018. №3. С. 88–93.
- [4] Габаев А.Х. Исследование высевяющих аппаратов зерновых сеялок на равномерность посева // Известия Оренбургского государственного аграрного университета, 2021. №5 (91). С. 100–104.
- [5] Камбулов С.И. Оптимизация параметров семяпроводов высевяющей системы сеялки // Достижения науки и техники АПК. 2006. №9. С. 30–32.
- [6] Турдалиев В., Махкамов Г. Теоретическое исследование движения семян лука после выброса из высевяющего аппарата // Проблемы механики. Ташкент, 2020. №1-2. С. 99–105.
- [7] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1970. – 456 с.
- [8] Miranda W.R. Note: hyperbolic function or equation of the hyperbola? // Research (PDF Available) March 2016 (DOI: 10.13140/RG.2.1.1239.5287).
- [9] Chen Ch., Sandor J. Chains related to trigonometric and hyperbolic functions and inverse trigonometric and hyperbolic functions // Journal of Mathematical Inequalities. Vol.7. 2013. №4, P.569–575 (doi: 10.7153/jmi-07-53).

Дата поступления  
13.07.2022

**Эргашев Ш.Т., Рустамов Р.М., Турдалиев В.М., Юлдашев М.А. Майда уруғли сабзавот экинлари уруғларини нов шаклидаги уруғ ўтказгичдаги кўчишларини назарий тадқиқи**

**Аннотация:** Мақолада сабзавот экинларини етиштиришида экиш сифатини ҳосилдорликка таъсири қисқача таҳлил этилган ва экишга таъсир этувчи асосий омиллар келтириб ўтилган. Шунингдек, майда уруғли сабзавот экинлари уруғларини нов шаклидаги уруғ ўтказгичдаги ҳаракатини ўрганиш бўйича ўтказилган назарий тадқиқот натижалари келтирилган. Ўтказилган тадқиқотларда уруғлар моддий нуқта ва уруғ ўтказгични қия текислик сифатида қаралиб, уруғларни думалашини таъминловчи ишқаланиш кучини ифодаловчи аналитик ифода олинган. Уруғларни думалаб ёки сирпаниб ҳаракатланишини таъминлайдиган ишқаланиш коэффициентининг чегаравий қийматини аниқлайдиган ифода келтириб чиқарилган. Олинган аналитик ифодаларни сонли ечими асосида уруғни новдан думалаб тушиш вақти ва чегаравий ишқаланиш коэффициентини уруғ шаклини инобатга олувчи коэффициентга боғлиқлик графиклари қурилган.

**Калит сўзлар:** уруғлар; экиш; уруғ ўтказгич; ҳаракат; ишқаланиш; шакл; думалаш; сирпаниш; қиялик.

**Ergashev Sh.T., Rustamov R.M., Turdaliev V.M., Yuldashev M.A. Theoretical study of the movement of seeds of small seed vegetable crops**

**Abstract:** The article briefly analyzes the influence of the quality of sowing on the yield in the cultivation of vegetable crops and shows the main factors affecting sowing. And also, the results of a theoretical study of the movement of seeds of small-seeded vegetable crops in an inclined seed deck are presented. In the studies carried out, the seeds were considered as a material point, and the seed deck as an inclined plane, an analytical expression was obtained representing the friction force that allows the seeds to roll. An expression is obtained that determines the limiting value of the coefficient of friction, which provides the seeds to roll or slide. Based on the numerical solution of the obtained analytical expressions, graphical dependences of the seed rolling time on the seed tray and the limiting friction coefficient on the coefficient taking into account the shape of the seeds are constructed.

**Key words:** seeds; sowing; tray; movement; friction; shape; rolling; sliding; tilting.

## РАСЧЁТНАЯ ОЦЕНКА ЗАХВАТА И НАГРУЖЕНИЯ ДОЛЕК ХЛОПКА ШПИДЕЛЯМИ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ШПИДЕЛЬНОГО ХЛОПКОУБОРОЧНОГО АППАРАТА

Норкузиев О.С.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: oqmirza@bk.ru

**Аннотация:** В статье рассмотрены исследования метода графоаналитического анализа взаимодействия созревших коробочек хлопка со шпинделями хлопкоуборочных машин в рабочей зоне. В качестве объекта были взяты конструктивные, скоростные параметры рабочих органов, горизонтального шпиндельного аппарата и механические свойства хлопчатника сорта АН-Баяут-2. Проведен расчетный анализ захватывающей способности и удержания долек хлопчатника шпинделями уборочных машин при различных угловых скоростях вращения и расположении (длине и диаметре коробочки) на поверхности шпинделя.

**Ключевые слова:** горизонтальный шпиндельный аппарат; скорость вращения шпинделя; графический и расчетный анализы; адгезия; коробочка; курак.

**Введение.** Наиболее трудоёмкий процесс в возделывании хлопчатника – уборка хлопка-сырца и раскрытых коробочек, на которую затрачивается значительная часть труда, закладываемого в производство хлопка.

Расширение механизированной уборки хлопка потребовало внедрения новых, более производительных и экономичных хлопкоуборочных машин (ХУМ), что вызывало необходимость углубления теоретических исследований процесса уборки хлопка и обоснование наиболее рациональных параметров ХУМ, влияющих на качество собираемого хлопка-сырца.

Как известно, качество хлопка волокна, собираемого ХУМ, напрямую зависит от параметров рабочих органов (барабана, шпинделя, съёмника, воздушной транспортной камеры и т.п.), которые непосредственно контактируют с хлопком в процессе сбора. Шпиндель является основным рабочим органом, который, вращаясь, наматывает на себя хлопок. В хлопкоуборочной машине скорость вращения рабочих органов является ключевым фактором, влияющим на эффективность и качество сбора хлопка.

Такие параметры, как скорость захвата и нагружение долек хлопка, зависящие от скорости барабана, являются основными величинами.

**Материалы и методы исследования.** Расчётная оценка захвата и нагружения долек хлопка шпинделями горизонтально-шпиндельного хлопкоуборочного аппарата осуществима с учетом ранее выполненных работ [1–3] и таких исследований:

- графоаналитический анализ условий взаимодействия созревших коробочек хлопка со шпинделями (горизонтально-шпиндельного аппарата) в рабочей зоне при различных скоростях работы машины, учитывая многовариантность условий захвата дольки;

- анализ расчётных параметров влияния адгезии на процесс захвата и удержания хлопка шпинделями хлопкоуборочных машин;

- обоснование модели для численной оценки захвата волокон хлопка (ПВ) из созревших коробочек шпинделями ГША в рабочей зоне и условия отрыва летучек в процессе наматывания долек хлопка на поверхность шпинделя.

Проведем графоаналитический анализ условий взаимодействия созревших коробочек хлопка со шпинделями ГША в рабочей зоне при различных скоростях рабочих органов. Учитывая многовариантность условия взаимодействия шпинделей с волокнами и семенами хлопка в рабочей камере аппарата, выполнено обоснование модели захвата с учетом следующих допущений:

1. В качестве модели примем четырёхдольную (дольки D1-D4) коробочку с размером семян согласно схеме (рис. 1.а, б), которая построена на основе реальных материалов экспериментальных исследований [1, 2]. Считаем, что каждая долька содержит по 8 летучек хлопка.

2. При анализе условий захвата волокон хлопка по каждому варианту учитываем относительные смещения шпинделя ГША и коробочек в узкой части рабочей щели. Для данного анализа используем расчетные параметры реализации технологического процесса уборочных аппаратов машины “Case 2022” [4] при частоте вращения ротора (води́ла шпиндельного барабана)  $n_b=158$  об/мин.

3. В качестве оценочных параметров для условий захвата волокон долек и летучек хлопка из созревших коробочек принимаем как на рис 1, 2.

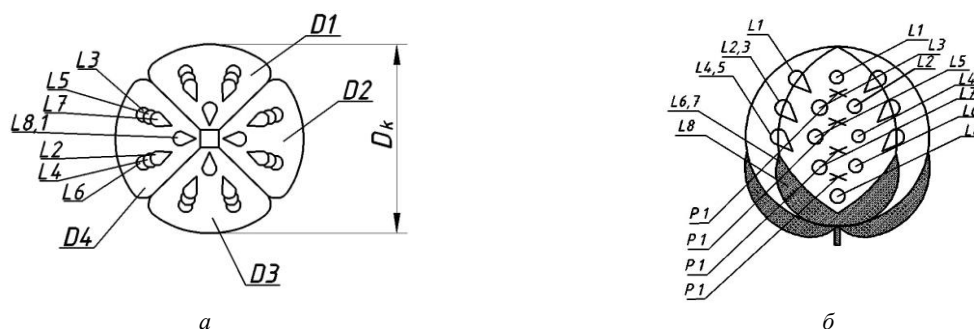


Рис 1. Схема размещения семян летучек в модели созревшей коробочки хлопка и позиции  $P_1, P_2, P_3, P_4$  входа шпинделей в эту коробочку по высоте

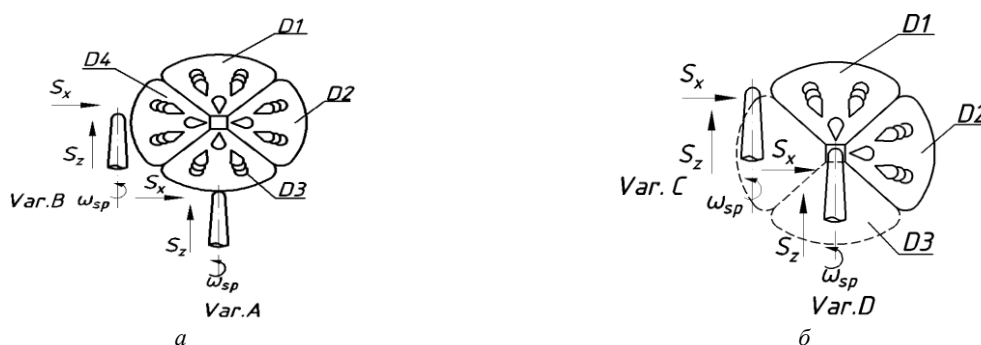


Рис 2. Схема подхода шпинделей к созревшей коробочке хлопка по вариантам А,В,С,Д

4. Угол поворота шпинделя  $\alpha$  характеризует условия формирования намотки летучек хлопка на поверхности шпинделя.

5. Расстояния  $l_i$ , определяемые по длине шпинделя, согласно схеме (рис. 3), характеризуют размещение семян летучек  $L_1-L_8$ .

6. Расстояние от центра шпинделя до центра летучек  $L_1-L_8$ , размещенных на поверхности шпинделя, обозначим через радиус  $r_i$ .

7. Наружный диаметр  $D_i$  окружности с центром на оси вращения шпинделя, внутри которого размещены летучки первого слоя. Эти оценочные параметры используются для всех вариантов контактирования шпинделя с модельной коробочкой (рис. 3,  $P_1$  и  $P_4$  идентичное).

8. Методика графоаналитических построений относительных расположений шпинделей и коробочек хлопка через интервал времени  $0.25T_{sh}=15/n_{sh}$ , соответствующего углу поворота  $\alpha=90^\circ$  шпинделя и углу поворота шпиндельного барабана  $\Delta\beta=\omega_b \cdot T_{sh}/4rad=3.445^\circ$ . Данные, полученные в результате реализации построения рассматриваемого варианта, показаны на рис. 3 и представлены в табл. 1, 2.

9. Долька хлопка в коробочке обрабатывается по четырем позициям ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) размещения шпинделей относительно каждой дольки модельной коробочки по высоте рабочей камеры. Точка внедрения осей вращения шпинделей в модельную коробочку хлопка показана значком (+) на рис. 1. Воспользовались четырьмя вариантами (А,В,В,Г) начального подхода шпинделя к модельной коробочке хлопка.

*Вариант А.* Подход шпинделя к коробочке сзади к дольке под номером  $D_3$  (рис. 1) и при четырёх позициях смещения по высоте рабочей щели в точках (+) ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) (см.рис. 1). Результаты графоаналитического построения представлены в табл. 1 и 2. Полученные расчетные данные используем для определения нагружения намотанных долек хлопка на поверхность шпинделя.

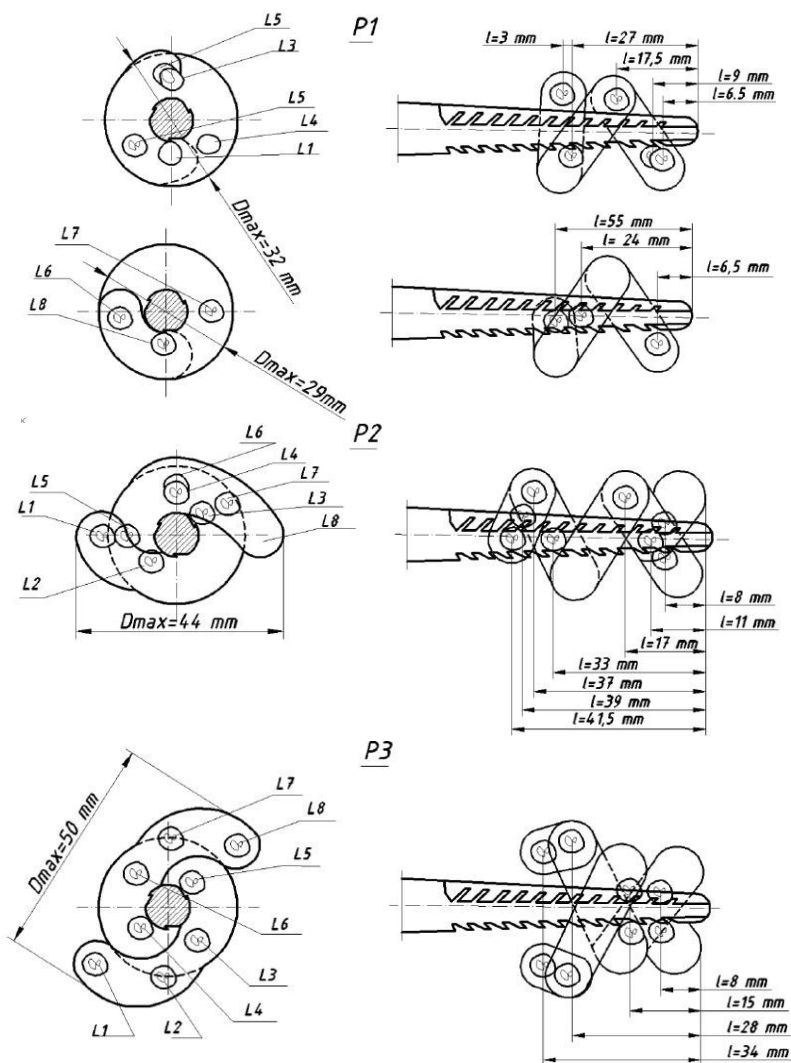


Рис. 3. Расчетная схема размещения дольки (летучек) хлопка на шпинделях переднего шпиндельного барабана (ПШБ) ГША в конечной фазе рабочей зоны для варианта А: позиции  $P_1, P_2, P_3$

10. В процессе работы хлопкоуборочной машины зубья шпинделей разрушают незрелые коробочки. В итоге происходит выделение сока курака, который загрязняет поверхность шпинделя, что отрицательно сказывается на работе машины. Для стабильной работы машины нужно очищать поверхность шпинделей специальной смесью (“Spindle Cleaner” – моющее средство шпинделя), которая очищает от грязи и ржавчины поверхности шпинделя. На основе свойства данного моющего средства проведем расчетный анализ адгезии, используя формулу для хлопка бумажных материалов Lou.L. [6] на основе уравнения Дюпре-Юнга [6]. Для расчета отношения адгезии, приложенной к хлопковому волокну летучки на поверхности шпинделя, используем схему (рис. 4)

$$A = \frac{\gamma\pi R}{h} \cdot (\cos(\theta) + 1) + \gamma\pi R \sin(\theta), \quad (1)$$

где  $\gamma_в=0.0728\text{ Н/м}$  – сила поверхностного натяжения воды;  $\gamma_{сок}=0.07\text{ Н/м}$  – сила поверхностного натяжения сока растений;  $\gamma_{мпр}=0.043\text{ Н/м}$  – сила поверхностного натяжения моющего

средства шпинделя;  $h=R_1 \cdot (1+\cos(\theta))$  – высота водной поверхности и ткани;  $R_0$  – радиус поверхности контакта между хлопком бумажной ткани и водной поверхностью;  $\theta_0$  – угол отекания от  $0^\circ - 90^\circ$ .

Таблица 1

Параметры взаимодействия модельной коробочки и шпинделя на основе графоаналитических построений для вариантов А и позиции P<sub>1</sub>

Варианты и позиции	Номер дольки	Размеры летучек	Параметры летучек на поверхности шпинделя и номер летучек								Среднеарифметические значения $z, r, D$ и $\alpha_{max}$
			1	2	3	4	5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A. P <sub>1</sub>	D <sub>3</sub>	z, мм	6.5	8.5	11.5	17	30	29.5	24	6.5	18.68
		r, мм	7.8	8	8.6	9.3	9.8	9.5	9.2	7.8	8.74
		D, мм	25.6	26	27	28.6	29.6	29	28.4	25.6	27.48
		$\alpha$ , град	0°	50°	170°	300°	530°	440°	270°	0°	530°

Таблица 2

Среднеарифметические значения параметров взаимодействия модельной коробочки и шпинделя по данным графоаналитических построений для вариантов А

Параметры					
Варианты	позиции	$\alpha_{max}$ , град.	$r_{ср}$ , мм	$z_{ср}$ , мм	$D_{ср}$ , мм
А	P1	530	8.74	18.68	27.48
	P2	630	11.5	23.3	33.5
	P3	406	12.77	21.25	35.55
	P4	540	12.26	24.2	34.5

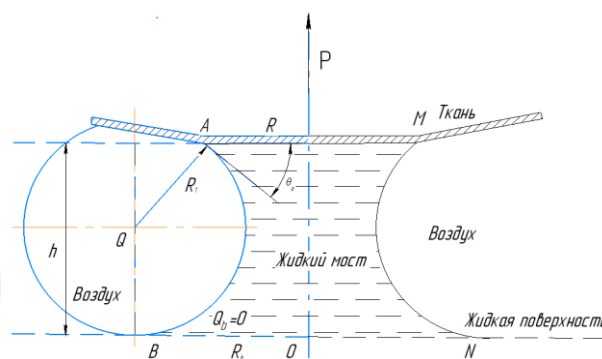


Рис 4. Расчетная схема адгезии

По расчетным данным формулы (1) построены графики функций, представленные на рис. 5.

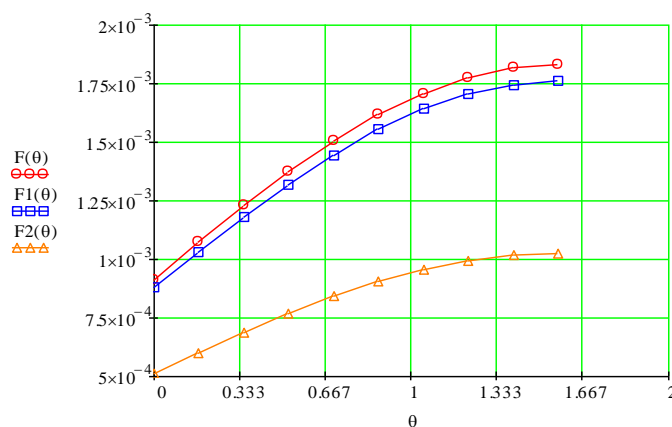


Рис 5. График зависимости силы адгезии от угла  $\theta_0$  – отекания при смачивании поверхности шпинделя различными жидкостями (o – вода; □ – сок растения, Δ – моющее средство шпинделя)

Расчёты показали, что при захвате и удержании долек хлопка на поверхности шпинделя процесс адгезии играет важную роль наряду с силой трения.



11. Проанализируем захватывающую способность шпинделя конической формы, используя закон силы трения Эйлера в постановке А.П. Ковганом (рис 6) [2]. Наматывание волокон на шпиндель произойдет под воздействием силы трения от натяжения волокна и давления (обжима) лежащих сверху слоев хлопка-сырца. При соприкосновении волокна и поверхности шпинделя возникает сила трения и адгезия, которая возрастает с увеличением угла обхвата.

Линейная скорость точки В (рис. 6) на поверхности шпинделя меньше перемещения точек оси кассет барабана, что создает хорошие условия захвата хлопка под воздействием силы трения и адгезии.

12. Ранее выполненные расчетные исследования [3] показали, что масса летучек хлопка, размещенная на шпинделе, нагружена сравнительно большими центробежными силами. Эти силы существенно превышают силы инерции, возникающие в процессе разгона массы летучек, захваченных зубьями шпинделей.

На основе расчетной схемы (см.рис. 6) уравнение захвата долек хлопка шпинделями хлопкоуборочной машины запишем в виде

$$\begin{aligned} dFs + dN - vds - Agds - (T + dT) \sin \frac{d\varphi}{2} - T \sin \frac{d\varphi}{2} &= 0, \\ -T \cos \frac{d\varphi}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\varphi}{2} - dF - dA &= 0, \\ dFs &= m\omega^2 rds. \end{aligned} \quad (2)$$

В связи с тем, что при покрытии поверхности шпинделя моющим средством возникающая сила трения намного меньше силы адгезии. Уравнения (2), описывающие равновесие реакций сил (пренебрегая  $dA$  силой залипания адгезионного материала), запишем в виде

$$\begin{aligned} dFs + dN - vds - Agds - (T + dT) \sin \frac{d\varphi}{2} - T \sin \frac{d\varphi}{2} &= 0, \\ -T \cos \frac{d\varphi}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\varphi}{2} - dF &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $dF$  – элементарная сила трения и адгезия;  $dT$  – приращения натяжения нити волокна;  $d\varphi$  – элемент центрального угла;  $dN$  – нормальное давление на единицу длины волокна от натяжения нити;  $vds$  – постоянное давление, возникающее от обжима послойно лежащих волокон хлопка на единицу длины волокна.

После преобразований (3) получим

$$dF = dT, \quad dN = (T + rv + A - Fs)d\varphi. \quad (4)$$

Согласно данным работы [2], сила трения равна

$$dF = f_0 dN + \sigma_\tau,$$

где  $f_0$  – коэффициент трения скольжения;  $\sigma_\tau$  – константа трения, характеризующая величину деформации поверхностей, мг/мм.

Для первого приближения рассмотрим захватывание долек волокон шпинделем цилиндрической формы. Наматывание хлопкового волокна на шпиндель, которое возникает под воздействием вышеописанных сил при контакте, описывается уравнением (4) в виде

$$\frac{dT}{d\varphi} - Tf_0 = r(A + f_0v + \sigma_\tau - Fs). \quad (5)$$

В результате преобразования уравнение (5) примет вид

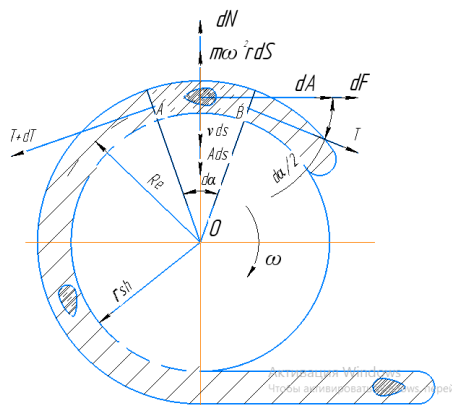


Рис 6. Расчетная схема захвата долек хлопка шпинделями хлопкоуборочной машины

$$\frac{dT}{d\varphi} = Tf_0 + rA + rf_0v + r\sigma_\tau - rFs). \quad (6)$$

Обе стороны уравнения (6) умножим на  $d\varphi$ :

$$dT = (Tf_0 + r(A + f_0v + \sigma_\tau - Fs))d\varphi. \quad (7)$$

Далее обе стороны уравнения (7) разделим на  $Tf_0 + r(A + f_0v + \sigma_\tau - Fs)$ , тогда получим

$$\frac{dT}{Tf_0 + r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs} = d\varphi. \quad (8)$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{1}{Tf_0 + r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs} dT = \int 1 d\varphi. \quad (9)$$

В результате интегрирования уравнения (9) получим

$$\frac{\ln(Tf_0 + r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs)}{f_0} = \varphi + C. \quad (10)$$

С применением формулы  $e^{f_1} = e^{f_2}$ ,  $e^{\ln \alpha} = \alpha$

$$e^{\frac{\ln(Tf_0 + r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs)}{f_0}} = e^{\varphi + C}. \quad (11)$$

Тогда получаем

$$T = Ce^{f_0\varphi} + \frac{r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs}{f_0}. \quad (12)$$

Уравнение (12) решается при граничных условиях

$$\varphi=0, T=0, \text{ и при } C = \frac{r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - rFs}{f_0}.$$

В результате решения (4) получим расчетную формулу для определения силы, приложенной к волокну по касательной, перпендикулярно оси шпинделя:

$$T = \frac{r(A + f_0v) + r\sigma_\tau - m\omega^2 r^2}{f_0} (e^{f_0\varphi} - 1), \quad (13)$$

где  $m$  – масса волокна на единицу длины, мг/мм;  $\omega$  – угловая скорость шпинделя, рад/с;  $r$  – радиус шпинделя, мм;  $A$  – сила залипания адгезионного материала, мг/мм,  $rFs = m\omega^2 r^2$ .

Используя (13), рассчитаем силу сцепления летучек со шпинделями в процессе наматывания хлопка со шпинделями ГША (рис. 7).

13. Проведем анализ условия нагружения летучки хлопка, намотанного шпинделями уборочного аппарата. Для условий работы ГША характерно то, что после захвата волокон летучек образование тел кольцевой формы с замкнутым или с разомкнутым концевыми участками между зонами рабочей и съема в течение времени  $0.25 T_\delta$  (время 1-го оборота водила шпиндельного барабана  $T_\delta = 60/n_\delta$ ) нагружено центробежными силами [5]. Эти усилия передаются группе волокон хлопка, контактирующих с поверхностью шпинделя (рис. 6). Если центробежная сила больше силы сцепления, то имеет место отрыв некоторой части намотанного хлопкового волокна.

Для анализа условия нагружения волокон хлопка, входящих в тело кольцевой формы, используем расчётную схему (см. рис. 6), где изображены сечения с плоскостью перпендикулярной к оси (Т.О) вращения шпинделя. Зубья трехдолевого шпинделя размещены по радиусу  $r_{sh}$ , а толщина  $\Delta$  массы хлопка постоянна по всему периметру шпинделя. Считаем, что пучок волокон ПВ хлопка летучек захватывается вращающимися шпинделями, а нейтральная ось отдельных сечений модели хлопка размещается на дуге радиуса  $R_l = r_{sh} + 0.5\Delta$ . Модель каждого участка нагружена интенсивностью центробежных сил

$$q_c = m_\ell \omega^2 R_\ell. \quad (14)$$

Полученные графическим построением пункты 1.3 и 1.5 и данные табл. 1, 2 используем в расчетах для определения нагруженных намоток хлопка с интенсивностью центробежных сил (14) при различных радиусах консольно расположенных летучек хлопка в зависимости от частоты вращения шпинделя. Расчетные данные представлены в табл. 3.

Таблица 3

Расчетные данные по определению нагруженных намоток хлопка

Расчетная величина	При $\omega=431$ рад/с и масса летучки 0.182 г					
$R, \text{cm}$	0.822	0.96	1.188	1.323	1.587	1.703
$q_c, \text{N}$	0.19	0.20	0.41	0.69	0.105	0.113

Из расчетов видно, что при  $R > 12.5$  мм возможен отрыв участка намоток хлопка с

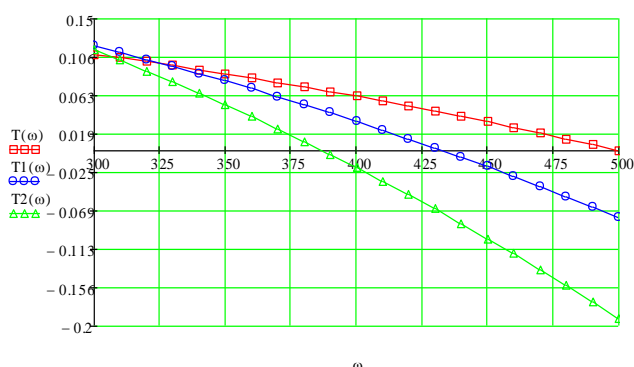


Рис. 7. График изменения силы захвата хлопка в зависимости от угловой скорости и диаметра сечения шпинделя ГША

поверхности шпинделя под действием центробежных сил (без учета силы адгезии), поскольку при условии  $Q < q$  для данного сорта хлопка прочность связи между летучками составляет  $Q = 0.38-0.42$  Н.

**Выводы.** Исследования по захвату и удержанию долек хлопка рабочими органами хлопкоуборочной машины позволяют сделать следующие выводы:

1. Анализ многовариантного графического построения намоток долек хлопка шпинделями показывает, что 15–25% долек хлопка наматывается на шпиндель кольцевой формы и нагружается равномерно по длине намотки, остальные 85–75% долек хлопка частично наматываются на шпиндель разомкнутыми концевыми участками и нагружаются неравномерно по длине намотки. Это зависит от вероятности подхода шпинделя к раскрытой коробочке.

2. Расчетные исследования влияния адгезии воды, сока растений и моющего средства на захватывающую способность шпинделя зависят от адгезионных свойств этих жидкостей. Из графика рис. 5 видно, что смачивание “Spindle Cleaner” (очиститель шпинделя) поверхности шпинделя в два раза уменьшает залипание волокна (в том числе грязи) хлопка по сравнению с обычной водой.

3. Анализы расчетов показывают, что линейные скорости  $v = \omega_{shr} r_{sh}$  захвата долек хлопка со шпинделя не должны превышать 1.5 м/с, тогда полнота сбора хлопка с куста хлопчатника в соответствии с расчётными (табл. 2, 3) будет не менее 94%. При этом приблизительный диапазон угловой скорости захвата шпинделя составляет 3600~4000 об/мин, что согласуется с результатами расчетного анализа (см. рис. 7) и отвечает требованиям вышепредставленного сорта хлопка.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сабликов М.В. Хлопкоуборочные машины. М.: Агропромиздат, 1985. – 151 с.
- [2] Ковган А.П. Исследование и технологические основы расчета хлопкоуборочных машин. М.: Машгиз, 1953. –165с.
- [3] Норкузиев О.С. Разработка модели оценки повреждаемости хлопка горизонтально-шпиндельными машинами: Дис ... канд. техн. наук. Янгюль, 2003. – 180 с.
- [4] Cotton Picker: "Case -2022" Instruction Manuals - Rac-9-79230 Case, April. 1997.
- [5] Li Teng., Hao Fu Ping., Han Zengde., Fang Constitution., Han Keli., Li Xiaodong. Theoretical Analysis and Test of Horizontal Spindle Picking and Cotton Picking. 2018.
- [6] Lou L., Ji F., Qiu Y. Simulating adhesion of wet fabrics to water: surface tension-based theoretical model and experimental verification // Text Res J 2015. №85. P. 1987–1998.

Дата поступления  
01.07.2022

**Норқўзиев О.С. Горизонтал-шпинделли пахта териш машинаси шпинделларининг пахта толасини илиб олиш ва юкланишини ҳисобий баҳолаш**

**Аннотация:** Мақолада очилган пахта чаноқларининг пахта териш машинаси (ПТМ) шпинделлари билан ўзаро мулоқати ишчи соҳасидаги алоқа графо-аналитик усулда таҳлил қилинган. Ишчи объекти сифатида АН-Баяут-2 пахта навининг ўлчамлари ва механик хусусиятлари, горизонтал шпиндели “Case-2022” машина ишчи органларининг кинематик параметрлари олинган. Пахта териш аппарати шпиндели турли бурчак тезликларда айланиш жараёнида пахта толаларини илиб олиш ва ушлаб туриш қобилияти ҳисобий таҳлили (шпиндел юзасида жойлашган дўлканинг ўлчамларини ҳисобга олган ҳолда) амалга оширилган.

**Калим сўзлар:** горизонтал шпинделли аппарат (ГША); шпиндел тезлиги; график ва ҳисоблаш таҳлили; ёпишиш; чаноқ; кўрак.

**Norkuziev O.S. Calculated evaluation of the grip and loading of cotton slices by the spindles of a horizontal-spindle cotton picker**

**Abstract:** The article deals with the study of the method of graphic-analytical analysis of the interaction of ripe cotton bolls with the spindles of cotton pickers in the working area. As an object, the design, speed parameters of the working bodies, the horizontal spindle apparatus “Case-2022” and the mechanical properties of cotton of the AN-Bayaut-2 variety were taken. A computational analysis of the gripping ability and retention of cotton cloves by harvesting machine spindles was carried out at various angular speeds of rotation and location (length and diameter of the box) on the spindle surface.

**Keywords:** horizontal spindle apparatus (HSA); spindle speed; graphical and computational analysis; adhesion; box; kurak.

УДК 621.78

## ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ ДИСПЕРСИОННОМ ТВЕРДЕНИИ НАПЛАВЛЕННОЙ СТАЛИ 3Х2В8Ф

**Алимбабаева З.Л.**

Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина в городе Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

E-mail:alimbabaevazulxumor@gmail.com

**Аннотация:** В статье рассматривается изменение механических свойств структурных параметров при дисперсионном твердении наплавленной стали типа 3Х2В8Ф. Сталь типа 3Х2В8Ф после наплавки при охлаждении испытывает мартенситное превращение, так как по содержанию легирующих элементов соответствует быстрорежущим сталям. Можно предположить, что в этом случае формируется структура с максимальным растворением легирующих элементов в мартенсите и максимальной плотностью дислокаций. Эта сталь относится к дисперсионной твердеющей. Фазовый анализ показывает, что в состоянии наплавки присутствуют две фазы – мартенсит и остаточный аустенит. Количество остаточного аустенита – в пределах 25–27%. По мере повышения температуры отпуска количество остаточного аустенита уменьшалось, хотя после отпуска 600°С было 19%.

**Ключевые слова:** мартенситное превращение; дислокация; матричная фаза; дисперсионное твердение; микронапряжения фаза; карбидная частица; фазовая перекристаллизация.

**Введение.** Способность металла сопротивляться воздействию внешних сил характеризуется механическими свойствами. Поэтому при выборе металла для изготовления деталей машин необходимо знать его механические свойства: прочность, упругость, пластичность, ударную вязкость и выносливость. Эти свойства определяют по результатам механических испытаний, при которых металлы подвергаются воздействию внешних сил (нагрузок). Внешние силы могут быть статическими, динамическими или циклическими (знакопеременными).

В зависимости от вида нагружения (растяжения, сжатия, изгиба, кручения, среза) и условий воздействия (температуры, скорости, периодичности и времени приложения) материалы принято характеризовать различными мерами сопротивления их деформации и разрушения – характеристиками механических свойств.

Характеристиками механических свойств экспериментально установлены зависимости, позволяющие с достаточной степенью точности оценивать предел прочности материалов по значениям твердости, а сопротивление срезу – по пределу прочности. Существуют также корреляционные связи между пределом выносливости и пределом прочности, а также между различными характеристиками разрушения.

**Характеристики стали 3Х2В8Ф.** Классификация – сталь инструментальная штамповая. Применяется тяжело нагруженный прессовый инструмент при горячем деформировании легированных конструкционных сталей и жаропрочных сплавов, пресс-формы литья под давлением медных сплавов [1]. Сталь типа 3Х2В8Ф после наплавки при охлаждении

испытывает мартенситное превращение, так как по содержанию легирующих элементов соответствует быстрорежущим сталям. Можно предположить, что в этом случае формируется структура с максимальным растворением легирующих элементов в мартенсите и максимальной плотностью дислокаций. Содержание химических элементов составляет:  $C=0.4$ ;  $Cr=2.7$ ;  $W=8.0$ ;  $V=0.5\%$ ;  $Si=0.4$ ;  $Mn=0.4$ ;  $P=0.03$ ;  $S=0.03$ ;  $Ni=0.35$ .

**Материалы и методы.** Механические свойства стали 3X2B8Ф.ГОСТ 5950-2000.Сортамент – сталь; предел текучести  $\sigma_{0,2}$ , МПа – 1530; временное сопротивление разрыву,  $\sigma_b$ , МПа – 1390; относительное удлинение при разрыве  $\delta_5$ , % – 12; относительное сужение  $\psi$ , % – 36; ударная вязкость КСВ при 20°C, Дж/см<sup>2</sup> – 200.[2] Особенности этих сталей включают в себя:

- повышенную твердость, которая составляет 60–65 единиц по шкале Роквелла;
- дополнительную прочность;
- временное сопротивление на разрыв, не должно быть ниже 900 МПа;
- способность сопротивляться воздействию абразивного износа;
- высокая прокаливаемость – свойство сталей термически упрочняться.

Эта сталь относится к дисперсионно твердеющей (рис.1).

Фазовый анализ показывает, что в состоянии наплавки присутствуют две фазы – мартенсит и остаточный аустенит. Количество остаточного аустенита должно быть в пределах 25–27%. По мере повышения температуры отпуска количество остаточного аустенита уменьшалось, хотя после отпуска при 600°C было 19%.

После отпуска при 650°C остаточный аустенит отсутствовал, а после отпуска при 700°C на рентгенограммах появились лишние карбиды:  $WC$ ,  $W_2C$ ,  $W_3Fe_3C$ ,  $W_6C$ ,  $V_2C$ . После отжига при 820°C появляются также линии карбида  $Cr_{23}C_6$ . В процессе отпуска параметры структуры наплавленной стали испытывают значительные изменения [2].

**Результаты.** При этой температуре выделяются карбиды цементитного типа, а в интервале 450–550°C происходит образование карбидов легирующих элементов. При температуре отпуска 550°C наблюдается дисперсионное твердение и в структуре происходит сильное измельчение блоков мозаики и роста микронапряжений. После отпуска при 600°C микронапряжения уменьшаются, размеры блоков увеличиваются, а период решетки  $\alpha$  – фазы принимает минимальное значение, что говорит о завершении распада твердого раствора  $\alpha$  – фазы, разрыва когерентности между матричной фазой и дисперсными частицами карбидной фазы. Однако за счет появления новых границ между матричной фазой и выделившимися частицами образуется высокая плотность дислокаций. Более высокие температуры отпуска ведут к резкому снижению плотности дислокаций, микронапряжений, росту размера блоков и коагуляции карбидных частиц [3].

При промежуточном отпуске с 250, 350, 450, 500, 550, 600, 650 и 700°C наблюдаются значительные изменения в параметрах тонкой структуры, а в процессе отпуска 350°C снижение плотности дислокаций и уровня микронапряжений кристаллической решетки (рис.2).

Таким образом, можно установить оптимальные режимы термической обработки литой (наплавленной) стали типа 3X2B8Ф по первому варианту – отпуск в интервале температуры 550–600°C, так как плотность дислокаций в пределах  $\rho=2.14\div 2.37 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ , размер блоков  $D=0.3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , микроискажения решетки  $\Delta a/a=3.05 \cdot 10^{-3}$ .

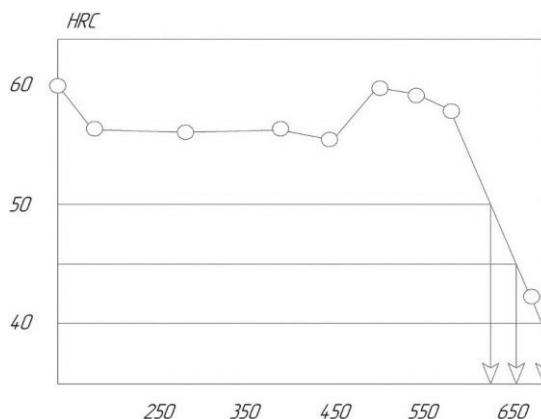


Рис.1. Изменение твердости при отпуске закаленной наплавленной стали типа 3X2B8Ф

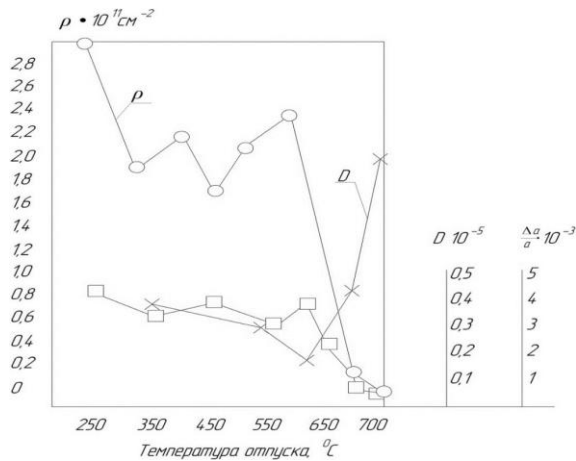


Рис. 2. Изменение плотности дислокаций  $\rho$ , размера блоков мозаик  $D$ , микронапряжений кристаллической решетки  $\Delta a/a$  при отпуске наплавленной стали типа 3X2B8Ф

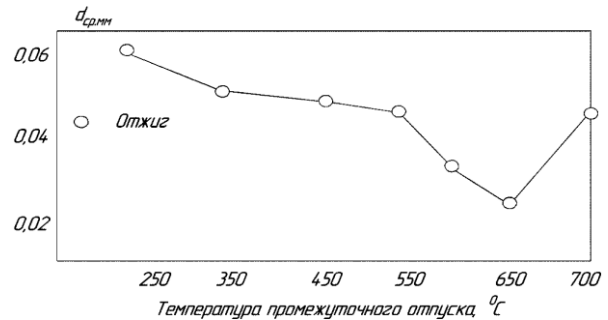


Рис. 3. Изменение величины аустенитного зерна стали типа 3X2B8Ф после повторной фазовой перекристаллизации 1130°C в зависимости от температуры промежуточного отпуска

Второй вариант термического упрочнения включает повторную фазовую перекристаллизацию. В целях выявления возможности наследования параметров исходной структуры проводили стабилизирующий промежуточный отпуск при температурах 250, 350, 450, 500, 550, 600, 650 и 700°C. Повторная фазовая перекристаллизация проводилась нагревом до 1130°C с последующей закалкой образцов в масле. Результаты исследований приведены в табл. 1, 2, 3 и на рис. 3.

Таблица 1

**Влияние температуры промежуточного отпуска наплавленной стали типа 3X2B8Ф на размер блоков и микронапряжений после закалки 1130°C и отпуска 550°C**

Температура промежуточного отпуска, °C	Микронапряжения $\Delta a/a^* \cdot 10^{-2}$	Размер блоков $D \cdot 10^{-3}$ см
Без отпуска	1.174	0.35
550	2.95	0.54
650	4.48	0.29
700	2.82	0.4
Отжиг	2.48	0.35

Таблица 2

**Плотность дислокаций  $\rho \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}$  литой (наплавленной) стали типа 3X2B8Ф после закалки 1130°C и отпуска в зависимости от температуры промежуточного и окончательного отпусков**

Температура промежуточного отпуска, °C	Температура окончательного отпуска, °C					
	250	350	450	500	550	600
Без отпуска	2.9	-	-	0.98	0.89	0.98
250	3.12	2.58	1.56	1.70	1.68	0.83
350	3.12	2.64	1.56	1.70	1.77	0.83
450	3.12	1.42	1.56	1.77	-	0.83
500	3.9	2.47	1.77	1.81	2.00	0.89
550	3.2	2.64	1.77	1.77	1.33	1.11
600	3.46	1.42	1.77	1.77	2.00	0.95
650	4.46	2.64	2.33	1.77	2.32	1.32
700	3.2	2.0	2.0	1.56	1.33	0.98
Исходный отжиг	3.2	2.16	1.56	1.32	1.17	0.95

**Обсуждение.** Из данных видно, что после фазовой перекристаллизации параметры структуры зависят от температуры промежуточного отпуска. Максимальный уровень плотности дислокаций  $\rho=4.46 \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-2}$ , минимальный размер зерна аустенита 0.025 мм (8 баллов), минимальный размер блоков мозаики  $D=0.29 \cdot 10^{-3}$  и максимум микронапряжения  $\Delta a/a=4.48 \cdot 10^{-3}$  наблюдается при промежуточном отпуске 650°C. Объясняется это стабилизирующим действием карбидных частиц оптимального размера, получающихся при промежуточном отпуске 600°C [4, 5].

На механические свойства ванадий оказывает неоднозначное влияние. Уменьшая чувствительность к перегреву, при содержаниях до 1% он может повышать прочность и пластичность высокоуглеродистых и среднеуглеродистых (~0.4% C) штамповых сталей. При этом увеличение содержания ванадия с 0.4 до 0.8% усиливает дисперсионное твердение и улучшает теплостойкость, но снижает вязкость. По этой причине сталь 3X2B8Ф относят к штамповым теплостойким сталям высокой вязкости.

Таблица 3

Размер закалки 1130<sup>0</sup>С в зависимости от температуры промежуточного отпуска

Показатель	Температура окончательного отпуска, <sup>0</sup> С							
	250	350	450	550	600	650	700	Отж.
Средний диаметр зерна, мм	0.061	0.052	0.049	0.044	0.033	0.025	0.049	0.045
Номер балла по ГОСТу	5	5	6	6	7	8	6	6

**Заклучение и рекомендации.** Следовательно, после окончательного отпуска при 550–600<sup>0</sup>С уровень плотности дислокаций, как в исходно наплавленной, так и повторно закаленной стали примерно одинаков. Исключение составляют низкие температуры окончательного отпуска, когда после фазовой перекристаллизации плотность дислокаций выше. В случае закалки исходно отожженной стали плотность дислокаций всегда существенно выше [6, 7].

Таким образом, оптимален второй вариант термического упрочнения, который включает в себя отпуск наплавленной стали при 650<sup>0</sup>С, повторный нагрев до 1130<sup>0</sup>С, закалку и отпуск до 550<sup>0</sup>С, так как в этом случае формируется структура не только с высокой плотностью дислокаций, дисперсными частицами второй фазы, но и мелким аустенитным зерном [8].

Использование предложенной стали позволит изготавливать штампы для холодного деформирования и технологическое оборудование повышенной надежности и производительности за счет повышения их эксплуатационных характеристик: твердости, теплостойкости и износостойкости. Следовательно, позволит получить более высокую твердость, теплостойкость, износостойкость, чем у прототипа. Введение кобальта дополнительно повысило твердость инструментальной штамповой стали за счет интерметаллидного упрочнения. Максимальная твердость стали после наплавки (с закалкой) и отпуска составила ≤69 HRC. Теплостойкость стали после термической обработки: HRC 59 при ≤630<sup>0</sup>С [9].

Сталь 3X2B8Ф обладает механической способностью сохранять твердость при высоких температурах и не терять это свойство при длительной работе, поэтому чаще всего применяется для изготовления формообразующих деталей пресс-форм для литья высокотемпературных алюминиевых, магниевых и медных сплавов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черепяхин А.А. Материаловедение. М.: Изд-во “Лотос”, 2004. – 256 с.
- [2] Ржевская С.В. Материаловедение. М.: Изд-во “Лотос”, 2004. – 422 с.
- [3] Бердиев Д.М., Мухамедов А.А. Выбор сталей и технология их термического упрочнения с помощью компьютерной программы. // Ж. «Техника и технология». М., 2009. № 1. С. 24 – 26.
- [4] Шуваева Е.А. Материаловедение М.: Изд-во. Дом МИСИС. 2012.–73с
- [5] Горохов В.А. Материалы и их технологии: учебник / Горохов В.А., Беляков Н.В., Схиртладзе А.Г.; В 2 ч. Минск; Новое знание; М.: ИНФРА-М, 2014. – 533 с.
- [6] Гуляев А.П., Гуляев А.А. Металловедение: Учебник для вузов. Изд 7-е., перераб. и доп. М.: ИД Альянс, 2011. – 644 с.
- [7] Фетисов Г.П., Гарифуллин Ф.А. Материаловедение и технология материалов. Учебник. М.: ИНФРА-М, 2014. – 397 с.
- [8] Арзамасов Б.Н., Макарова В.И., Мухин Г.Г., Рыжов Н.М., Силаева В.И. Материаловедение. Учебник для вузов. МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2008. – 648 с.
- [9] Пасюткина О.В. Материаловедение. Минск: РИПО, 2018. – 264 с.

Дата поступления  
10.06.2022

*Алимбабаева З.Л. 3Х2В8Ф эритмали пўлатни дисперсион қотишидаги механик хоссаларини ўзгариши*

**Аннотация:** Мақолада 3Х2В8Ф эритмали қопланган пўлатни дисперсион қотишидаги механик хоссаларини ўзгариши кўриб чиқилган. 3Х2В8Ф эритмали пўлатда қоплангандан сўнг совуш жараёнида мартенсит ўзгаришлар содир бўлади, чунки таркибидаги легировчи элементларга кўра тезкесар пўлатларга мос. Бунда мартенситда легировчи элементлар максимал эриши ва максимал дислокациялар зич структура ҳосил қилади. Бу пўлат дисперсион пўлатлар қаторига киради. Фаза таҳлили шуни кўрсатадики, қоплаш ҳолатида иккита фаза мавжуд: мартенсит ва қолдиқли аустенит. Қодиқли аустенит миқдори 25-27% ни ташкил этади. Ўшишти ҳарорати ўсиши билан қодиқли аустенит миқдори камаяди, ваҳоланки 600°C да бўшиштида унинг миқдори 19% бўлади.

**Калим сўзлар:** мартенсит ўзгариши; дислокация; матрица фазаси; дисперсион қотиши; карбид заррачаси; микро кучланишлар; фаза қайта кристалланиши.

*Alimbabaeva Z.L. Changes in mechanical properties under dispersion hardening of welded 3X2B8Φ steel*

**Abstract:** The article considers the change in the mechanical properties of structural parameters during dispersion hardening of welded 3X2B8Φ steel. Steel of the 3X2B8Φ type after surfacing during cooling experiences a martensitic transformation since it corresponds to high-speed steels in terms of the content of alloying elements. It can be assumed that in this case a structure is formed with the maximum dissolution of alloying elements in martensite and the maximum density of dislocations. This steel belongs to dispersion hardening. The phase analysis shows that two phases are present in the surfacing state - martensite and retained austenite. The amount of residual austenite is within 25-27%. As the tempering temperature increased, the amount of retained austenite decreased, although after tempering at 600°C it was 19%.

**Keywords:** martensitic transformation; the dislocation; matrix phase precipitation; hardening; holiday micro tension phase; carbide particles; phase recrystallization.

УДК 621.01

## РАСЧЕТ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕЖДУПИЛЬНЫХ ПРОКЛАДОК ЛИНТЕРНОЙ МАШИНЫ

**Ибрагимов Ф.Х., Абзиров О.Х., Примов Б.Х., Мухаммадиев Т.Д.**

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им.М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: farkhod.ibragimov.1985@mail.ru*

**Аннотация:** В статье приведены результаты расчета малых колебаний междупильной прокладки линтерной машины. Установлены частота и период малых колебаний междупильной прокладки как для серийной, из алюминия АК5М2, так и предложенной стальной из Ст.3. Расчеты позволили установить разницу значений частоты и периода малых колебаний междупильных прокладок из стали ст.3 и алюминия АК5М2, которые соответственно составляют 2.88 и 0.347 раза. Результаты расчетов малых колебаний показали возможность использования стальной междупильной прокладки при сборке пильных цилиндров линтерной машины.

**Ключевые слова:** линтерная машина; междупильная прокладка; пильный цилиндр; частота и период малых угловых колебаний; распределенная масса по длине; круговая частота колебаний.

Опыт эксплуатации линтерных машин показывает, что они работают без простоев и дают лент высокого качества только при правильно собранном пильном цилиндре и хорошо отрегулированных технологических зазорах и разводках.

Перед сборкой на вал пильного цилиндра междупильные прокладки следует проверить на толщину с использованием измерительных приборов, а также предельным калибром.

Пильные цилиндры должны быть взаимозаменяемыми, поэтому их после сборки целесообразно проверять на стандартной колосниковой решетке. Пильный цилиндр должен свободно вращаться в стандартной колосниковой решетке, не задевая пилами за колосники. Пилы следует располагать в середине щели между колосниками [1, 2].

Междупильные прокладки являются массовой деталью хлопкоочистительных машин и используются в основном в пильных джинах, линтерных машинах и волокноочистителях. С целью многократного использования материалов, уменьшения веса и упрощения технологии изготовления их отливают из алюминиевого сплава методом центробежного литья в форме с последующей механической обработкой торцевых поверхностей цилиндрических поясков с обеспечением точности по толщине несколько сотых долей миллиметра.

Недостатком существующей конструкции междупильной прокладки линтерной машины является использование дефицитного цветного металла – алюминия, деформация алюминиевых прокладок, излишний вес и дороговизна. Поэтому существующая конструк-



ция прокладки линтерной машины не обеспечивает точной координации пил в межколосниковых зазорах колосниковой решетки и придание необходимой жесткости пыльному цилиндру.

Для устранения указанных недостатков предложена новая конструкция междупильной прокладки хлопкоочистительных машин (рис. 1), в которой диск с отверстием под размер вала и концентрически расположенный пояс выполнены из прочного листового металла, причём наружный диаметр диска в виде прямобочной шлицы, а концентрически расположенный пояс выполнен в виде кольца с отверстиями по периметру для соединения диска и кольца. При этом во внутреннее отверстие диска установлен второй пояс с отверстиями [3].

Недостаточная точность и жесткость деталей пыльного цилиндра линтерной машины могут привести к ухудшению процесса линтерования и повреждению линта, поэтому междупильную прокладку при проектировании следует подвергать необходимым динамическим расчетам. Важным параметром динамической системы привода линтерной машины являются амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний пыльного цилиндра [4].

Однако, если частота собственных малых угловых колебаний междупильной прокладки линтерной машины становится равной собственной частоте колебаний системы двигатель – пыльный цилиндр, наступает явление резонанса, сопровождающееся сильным шумом и вибрациями, а в ряде случаев и механическими повреждениями. В этих случаях критическое число оборотов определяется собственной частотой крутильных колебаний вращающейся системы [5, 6, 7]. Значения частот собственных малых колебаний нужны для определения резонансных зон, оценки характера затухания колебаний и определения амплитуд вынужденных крутильных колебаний привода линтерной машины.

Для рассмотрения малых угловых колебаний междупильной прокладки линтерной машины необходимо получить разложения в ряды кинетической и потенциальной энергий.

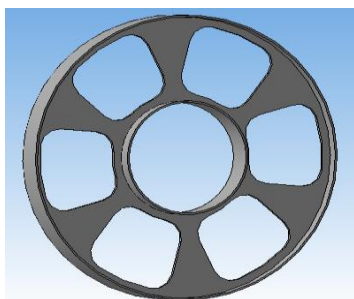


Рис. 1. Новая конструкция междупильной прокладки линтерной машины

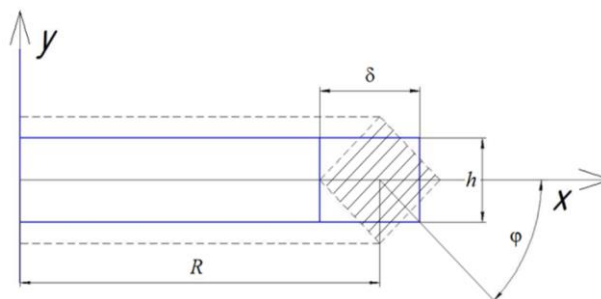


Рис. 2. Расчетная схема междупильной прокладки линтерной машины

Для определения частоты собственных малых угловых колебаний междупильной прокладки линтерной машины считаем, что осевая линия междупильной прокладки остается недеформированной, и её поперечные сечения поворачиваются при колебаниях на один и тот же угол (рис. 2). Масса единицы длины междупильной прокладки линтерной машины  $m_0=0.11673\text{кг}/0.3606\text{м}=0.3237\text{ кг/м}$ , модуль упругости  $E=8\cdot 10^{11}\text{ Н/м}^2$  [8], толщина междупильной прокладки  $\delta=0.0015\text{ м}$  намного меньше радиуса  $R=0.08\text{ м}$ .

Каждая точка сечения междупильной прокладки при повороте сечения на угол  $\varphi$  перемещается по дуге, равной  $\rho\varphi$ , где  $\rho$  – полярный радиус точки (рис. 3). Проекция этого перемещения на радиальном направлении  $u=\rho\varphi\sin\alpha=u\varphi$ , что соответствует удлинению по окружности (этого волокна) на  $\Delta l=2\pi u\varphi$ .

Так как междупильные прокладки линтерной машины работают на растяжение, то потенциальная энергия

$$\Pi = \int_F \frac{E}{2} \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2 dF = \frac{\pi E J_x \varphi^2}{R}. \quad (1)$$

Кинетическая энергия вращения междупильной прокладки линтерной машины

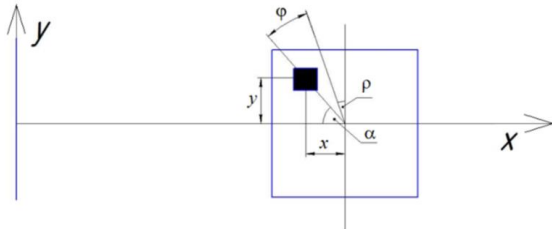


Рис. 3. Расчетная схема междупильной прокладки линтерной машины

$$T = \int_0^{2\pi R} \frac{J_o \dot{\varphi}^2 ds}{2} = \frac{J_o \dot{\varphi}^2}{2} 2\pi R. \quad (2)$$

Момент инерции единицы длины междупильной прокладки линтерной машины относительно осевой линии

$$J_o = \rho_1 J_p = \frac{F \rho_1 J_p}{F} = \frac{m_o J_p}{F}, \quad (3)$$

где  $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$  – полярный момент

инерции поперечного сечения междупильной прокладки линтерной машины;

$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4)$  – момент инерции междупильной прокладки по оси  $x$ ;  $c = d/D$ ;  $d$  – внутренний диаметр междупильной прокладки линтерной машины;  $D$  – наружный диаметр междупильной прокладки линтерной машины;  $F$  – площадь поперечного сечения междупильной прокладки линтерной машины.

Из соотношений (1) и (2) получаем дифференциальное уравнение малых крутильных колебаний междупильной прокладки линтерной машины

$$\ddot{\varphi} + \frac{EF}{m_o R^2} \frac{J_x}{J_p} \varphi = 0, \quad (4)$$

или  $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$ , где круговая частота колебаний  $k = \sqrt{\frac{EF}{m_o R^2} \frac{J_x}{J_p}}$ . Его решение имеет вид

$$\varphi = A \cdot \sin(kt + \alpha). \quad (5)$$

Постоянные величины  $A$  и  $\alpha$  являются амплитудой и начальной фазой. Период малых колебаний междупильной прокладки линтерной машины

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_o R^2}{EF} \frac{J_p}{J_x}}. \quad (6)$$

Если материал междупильной прокладки линтерной машины выполнен из стали Ст3, а  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> [8];  $F = 0.00006305$  м<sup>2</sup>;  $EF = 12.61$  МН;  $m_o = 0.11673$  кг/0.3606 м = 0.3237 кг/м;  $R = 0.05739$  м;  $D = 0.16$  м;  $d = 0.0618$  м;  $c = d/D = 0.386$ ;  $J_x = 2.17 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>;  $J_p = 4.26 \cdot 10^{-7}$  м<sup>4</sup>, тогда  $k = 153800.5$  с<sup>-1</sup>, а  $\tau = 4.085 \cdot 10^{-5}$  с.

Если материал междупильной прокладки линтерной машины изготовлен из алюминия АК5М2, а  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> [9];  $F = 0.000107493$  м<sup>2</sup>;  $EF = 7.52$  МН;  $m_o = 0.12617$  кг/0.4125 м = 0.3058 кг/м;  $R = 0.06565$  м;  $D = 0.16$  м;  $d = 0.0618$  м;  $c = d/D = 0.386$ ;  $J_x = 2.13 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>;  $J_p = 2.16 \cdot 10^{-7}$  м<sup>4</sup>, тогда  $k = 53422.39$  с<sup>-1</sup>, а  $\tau = 1.176 \cdot 10^{-4}$  с.

Основными конструктивными параметрами междупильной прокладки линтерной машины являются масса и площадь её поперечного сечения. Поэтому нами были изучены и построены графики влияния этих параметров на круговые частоты (рис. 4 и 5) и период (рис. 6 и 7) малых колебаний междупильной прокладки линтерной машины.

При этом установлено, что с увеличением поперечного сечения междупильной прокладки с 0.00001 до 0.0001 м<sup>2</sup> (рис. 4) увеличивается круговая частота колебаний прокладки

(для ст.3 – от 19552.1 до 61829.2  $\text{с}^{-1}$ , для АК5М2 – от 7244.5 до 22909.2  $\text{с}^{-1}$ ), а с увеличением распределенной массы по длине прокладки с 0.05 до 0.5  $\text{кг/м}$  (см. рис. 5) снижается круговая частота колебаний прокладки (для ст.3 – с 124919.3 до 39502.9  $\text{с}^{-1}$ , для АК5М2 – с 58746.3 до 18577.2  $\text{с}^{-1}$ ).

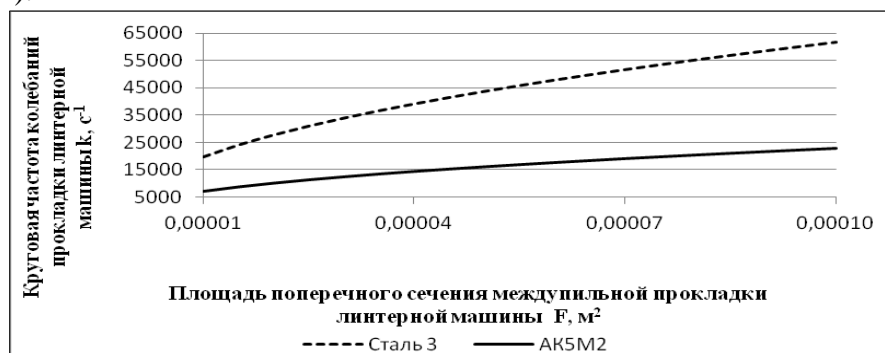


Рис. 4. Изменение круговой частоты колебаний междупилльной прокладки линтерной машины  $k$  в зависимости от площади её поперечного сечения  $F$

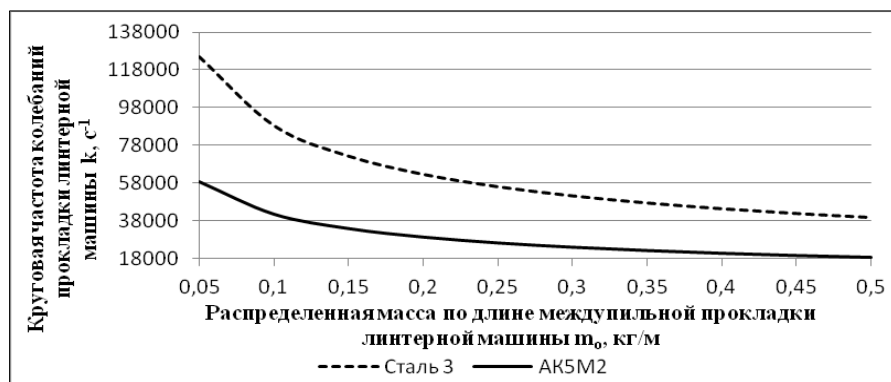


Рис. 5. Изменение круговой частоты колебаний междупилльной прокладки линтерной машины  $k$  в зависимости от распределенной массы по длине междупилльной прокладки  $m_0$

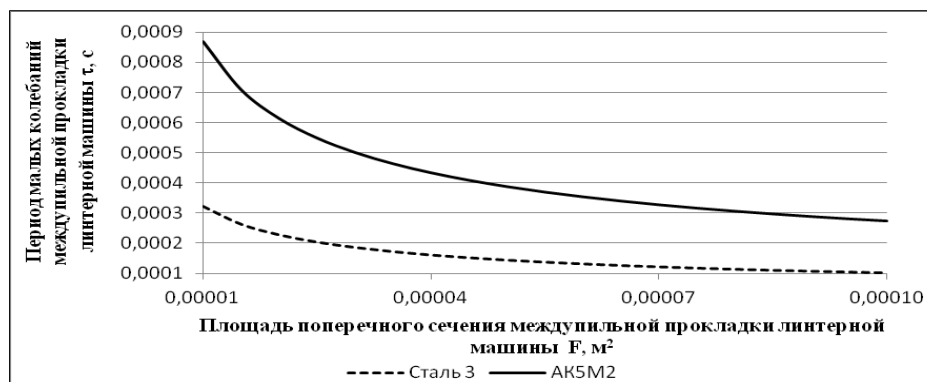


Рис. 6. Изменение периода малых колебаний междупилльной прокладки линтерной машины  $\tau$  в зависимости от площади её поперечного сечения  $F$

Кроме того, установлено, что с увеличением поперечного сечения междупилльной прокладки с 0.00001 до 0.0001  $\text{м}^2$  (см. рис. 6) снижается период малых колебаний прокладки (для ст.3 – с  $3.213 \cdot 10^{-4}$  до  $1.016 \cdot 10^{-4}$   $\text{с}$ , для АК5М2 – с  $8.673 \cdot 10^{-4}$  до  $2.742 \cdot 10^{-4}$   $\text{с}$ ), а с увеличением распределенной массы по длине прокладки с 0.05 до 0.5  $\text{кг/м}$  (см. рис. 7) увеличивается период малых колебаний прокладки (для ст.3 – от  $5.029 \cdot 10^{-5}$  до  $1.59 \cdot 10^{-4}$   $\text{с}$ , для АК5М2 – от  $1.069 \cdot 10^{-4}$  до  $3.338 \cdot 10^{-4}$   $\text{с}$ ).

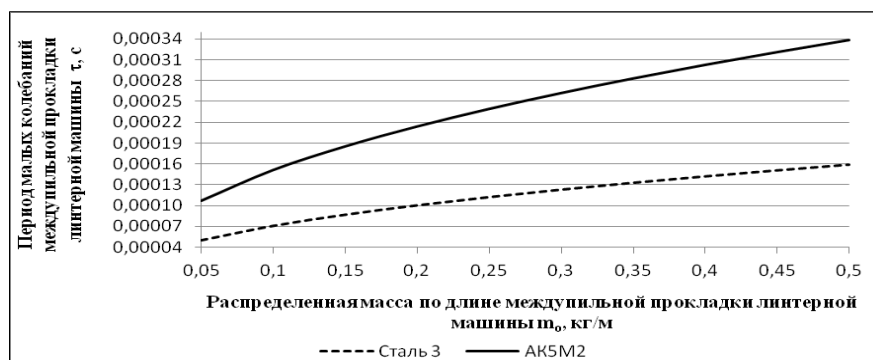


Рис. 7. Изменение периода малых колебаний междупильной прокладки линтерной машины  $\tau$  в зависимости от распределенной массы по длине междупильной прокладки  $m_0$

Таким образом, расчет малых колебаний междупильной прокладки позволил установить разницу значений круговой частоты и периода колебаний из стали Ст3 ( $k=153800.56 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau=4.085 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ) и алюминиевой АК5М2 ( $k=53422.39 \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau=1.176 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ ), которые составляют, соответственно, 2.88 и 0.347 раза. Результаты расчетов малых колебаний междупильных прокладок из стали ст.3 и алюминия АК5М2 показали возможность использования стальной междупильной прокладки при сборке пильных цилиндров для серийных линтерных машин.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зикриёва Э.З. Первичная обработка хлопка-сырца. Учебное пособие для вузов. Ташкент.: Мехнат, 1999. –398 с.
- [2] Паспорт пильного линтера 5ЛП. Ташкент: ТГСКБ по хлопкоочистке, 1981.–18 с.
- [3] Мухаммадиев Д.М., Ибрагимов Ф.Х. и др. Патент РУз № IAP 06691. - 2021. - №3. Междупильная прокладка для хлопкоочистительных машин. 29.12.2021.
- [4] Мухаммадиев Д.М. Амплитудно-частотные характеристики крутильных колебаний пильного цилиндра джина // Узбекский журнал «Проблемы механики». Ташкент, 2014. №3-4. С. 107–110.
- [5] Мирошниченко Г.И. Основы проектирования машин первичной обработки хлопка. М.: Машиностроение, 1972.–486 с.
- [6] Бабаков И.М. Теория колебания. М.: Наука, 1968. – 560 с.
- [7] Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
- [8] Механические свойства стали ст3 (<https://rustaste.ru/mekhanicheskie-svojjstva-stali-st3.html>).
- [9] Алюминиевый сплав АК5 (<https://www.mpstar.ru/cvetnye-metally/alyuminij-splavy/ak5/>).

Дата поступления  
19.07.2022

**Ибрагимов Ф.Х., Абзоиров О.Х., Примов Б.Х., Мухаммадиев Т.Д. Линтер машинаси арралараро қистирмаларнинг кичик тебранишларини ҳисоблаш**

**Аннотация:** Мақолада линтер машинаси арралараро қистирмасининг кичик тебранишларини ҳисоблаш натижалари келтирилган. Алюминий АК5М2 дан ҳамда таклиф қилинган Ст. 3 нўлатдан ясалган арралараро қистирмаларнинг кичик тебранишининг частотаси ва даври аниқланган. Ҳисоблашлар ст.3 ва алюминий АК5М2 нўлатдан ясалган арралараро қистирмаларнинг частотаси ва даври қийматларининг фарқларини аниқлашга имкон берган, бу мос равишда 2.88 ва 0.347 мартани ташкил этган. Кичик тебранишларни ҳисоблаш натижалари линтер машинасининг аррала цилиндрларини йиғишда нўлат арралараро қистирмадан фойдаланиш имкониятини кўрсатди.

**Калим сўзлар:** линтер машинаси; арра пичоги; арра цилиндр; кичик бурчакли тебранишларнинг частотаси ва даври, узунлик бўйича тақсимланган масса; айланма тебраниш частотаси.

**Ibragimov F.Kh., Abzoirov O.Kh., Primov B.Kh., Mukhammadiev T.D. Calculation of small oscillations of the inter-saw linter machine gaskets**

**Abstract:** The article presents the results of the calculation of small fluctuations in the saw blade of a linter machine. The frequency and period of small fluctuations of the saw-to-saw spacer are established both for the serial one, made of AK5M2 aluminum, and the proposed steel one, made of St.3. The calculations made it possible to establish the difference in the values of the frequency and period of small vibrations between saw blades made of steel st.3 and aluminum AK5M2, which are 2.88 and 0.347 times, respectively. The results of calculations of small vibrations showed the possibility of using a steel saw spacer when assembling the saw cylinders of a linter machine.

**Keywords:** linter machine; saw blade; saw cylinder; frequency and period of small angular oscillations; distributed mass along the length; circular oscillation frequency.

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ НОРМАТИВНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ НА СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ

Кумаков Ж.Х.<sup>1</sup>, Акбаров Н.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им/ М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан  
E-mail: jaxongirku001@gmail.com, nodirbek00086@mail.ru

**Аннотация:** Приведен краткий анализ существующих статической, динамической и волновой теорий сейсмостойкости подземных трубопроводов. Показаны недостатки и преимущества рассмотренных теорий. Обсуждены методы определения параметра взаимодействия  $K_x$ . Рассмотрен метод определения этого параметра на основе волновой теории с использованием прочностных характеристик грунта. Предложено внести в нормативный метод определения продольных напряжений в грунте формулу для определения  $K_x$  через прочностные характеристики грунтов.

**Ключевые слова:** подземный трубопровод; грунт; сейсмические волны; напряжения; деформация; законы взаимодействия.

**Введение.** Сейсмической безопасностью или сейсмостойкостью (прочность при сейсмических воздействиях) подземных трубопроводов интенсивно начали заниматься с 50-х годов прошлого столетия. Видными учеными, такими как Sh. Okamoto, Ш.Г. Напетваридзе, П.П. Бородавкин, Э.М. Ясин, А.Б. Айнбиндер, Т.Р. Рашидов, Г.Х. Хожметов, Т.Д. О’Rourke, М.Д. О’Rourke [1–9], и многими другими [10–16] были созданы теории сейсмостойкости подземных трубопроводов на основе материалов, собранных в результате обследования последствий разрушительных землетрясений, лабораторных и натурных экспериментальных исследований и вытекающих из них фактов и гипотез.

Проблема определения или оценки сейсмостойкости подземных трубопроводов сводится так или иначе к определению напряжений в теле трубы различными методами. Напряженное состояние подземной трубы при действии сейсмических сил достаточно сложное. В целях упрощения они разделяются на продольные напряжения (вдоль оси трубопровода), поперечные (перпендикулярно оси трубопровода), изгибные, радиальные, кольцевые и т.д. Многими авторами отмечено, что наиболее опасными из них являются продольные напряжения [1–8].

Известно также, что напряженное состояние подземного трубопровода при сейсмических воздействиях возникает в результате его взаимодействия с окружающей грунтовой средой [1, 2, 4, 6-8, 10]. Поэтому взаимодействие подземного трубопровода с грунтом также разделяют, в основном, на продольное и поперечное.

Продольное взаимодействие подземного трубопровода с грунтом более простое с механической точки зрения, и оно более подробно изучено. Поперечное взаимодействие подземного трубопровода с грунтом более сложное и оно еще мало исследовано. При поперечном взаимодействии трубопровода с грунтом трубопроводы, имеющие круглое сечение, не однозначно взаимодействуют с грунтом. При движении круглого сечения в грунте на фронтальной стороне образуется больше давление, чем на задней стороне сечения. Боковые поверхности этого сечения еще более сложным образом взаимодействуют с грунтом. При этом, каким образом, по каким законам взаимодействует каждая точка внешней поверхности трубы с грунтом не изучено. Здесь рассматриваются некоторые вопросы продольного взаимодействия подземного трубопровода с грунтом.

Цель работы – анализ существующих теорий сейсмостойкости подземных трубопроводов и на ее основе внесение уточнения в Нормативный метод определения продольных сейсмических напряжений в КМК 2.01.03-19 [11].

### Краткий анализ существующих теорий сейсмостойкости подземных трубопроводов

**Статическая теория.** В расчетах на сейсмостойкость подземных трубопроводов обычно принимаются максимально упрощенные схемы, которые иногда очень далеки от реального положения. При определении продольных напряжений в подземном трубопро-

воде используется упрощенная теория, которая основывается на гипотезе о равенстве продольных деформаций грунта и трубопровода при продольном воздействии сейсмических нагрузок [3]. В этой теории определяется деформация грунта, которая считается упругим полупространством при распространении в нем плоской волны, фронт которой перпендикулярен к оси трубопровода. Деформация грунта определяется без учета трубопровода, т.е. считается, что подземный трубопровод не влияет на формирование деформации грунта. Взаимодействия трубопровода с грунтом не учитывается, а продольная напряжения в трубопроводе определяется из уравнений статики. Поэтому данная теория получила еще название «статическая теория» [4].

В этом случае деформация грунта равна

$$\varepsilon_g = v_g / C_g, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_g$  – продольная по оси трубопровода деформация грунта;  $v_g$  – скорость частиц грунта в продольном направлении;  $C_g$  – скорость распространения продольных волн в грунте.

Далее деформация трубопровода  $\varepsilon_c$  принимается равной деформации грунта

$$\varepsilon_c = \varepsilon_g. \quad (2)$$

При известном значении деформации трубопровода  $\varepsilon_c$  продольное напряжение трубопровода определяется из закона Гука, считая трубопровод упругим

$$\sigma_c = \varepsilon_c E_c, \quad (3)$$

где  $E_c$  – модуль упругости материала трубопровода.

По значению продольного напряжения в материале трубопровода оценивается сейсмическая прочность трубопровода.

Здесь необходимо отметить, что данная упрощенная теория легла в основу нормативного метода расчета на сейсмостойкость подземных трубопроводов в КМК 2.01.03-19 [11], где в уравнение (3) были внесены множество поправочных коэффициентов и произведена замена параметров для удобства при ее использовании инженерами расчетчиками.

**Динамическая теория.** Второй этап развития теории сейсмостойкости подземных трубопроводов привел в середине прошлого века к созданию динамической теории сейсмостойкости подземных трубопроводов [4]. Основой данной теории являются динамической силы взаимодействия трубопровода с грунтом, которые возникают из-за разности динамических деформаций грунта и трубопровода. В динамической теории гипотеза (2) считается несправедливой. Здесь под действием сейсмической нагрузки на систему «грунт – трубопровод» на внешней поверхности подземного трубопровода возникает сила взаимодействия, которая определяется в случае продольного взаимодействия трубопровода с грунтом в простейшем случае по соотношению

$$\tau = K_x u, \quad (4)$$

где  $\tau$  – касательное напряжение, возникающее на поверхности контакта трубопровода с грунтом (МПа);  $K_x$  – коэффициент продольного взаимодействия или коэффициент жесткости связи частиц грунта с внешней поверхностью трубопровода (МПа/м);  $u = u_g - u_c$  – относительное смещение, м;  $u_g$  – абсолютное продольное смещение грунта в направлении оси трубопровода м;  $u_c$  – абсолютное продольное смещение трубопровода, м.

Далее с учетом (4) или ее более усложненными вариантами, составляются дифференциальные уравнения продольного колебания трубопровода в одномерной, плоской и пространственной постановках. Полученные уравнения колебания решаются с соответствующими граничными и начальными условиями тем или иным методом.

В динамической теории в большинстве случаев задачи сейсмостойкости приводятся к стационарным задачам теории колебаний. Это обусловлено стремлением к получению простых инженерных решений задач сейсмостойкости подземных трубопроводов. Аналогичным образом рассматриваются задачи поперечных, изгибных, крутильных колебаний

подземных трубопроводов при воздействии сейсмических нагрузок. Главным отличием задач динамической теории сейсмостойкости подземных трубопроводов, от задач обычной теории колебаний, является присутствие в уравнении движения силы взаимодействия типа (4). Поэтому достоверность полученных результатов по динамической теории полностью определяется достоверностью закона взаимодействия (4) или аналогичных более сложных законов. В целом динамическая теория была следующим большим шагом в развитии теории сейсмостойкости подземных трубопроводов.

**Волновая теория.** Экспериментальными исследованиями установлены зависимости силы взаимодействия  $\tau$  от глубины заложения подземного трубопровода [4, 5, 10]. Глубина заложения – это есть  $\sigma_N = \sigma_N^S$ , т.е. статическое нормальное к внешней поверхности трубопровода давление (напряжение). Однако известно, что при распространении сейсмической волны, даже в случаях, когда фронт волны перпендикулярен к оси трубопровода, возникает динамическое нормальное напряжение  $\sigma_N = \sigma_N^D$ , которое сопоставимо с  $\sigma_N^S$ , а иногда она может быть больше, чем  $\sigma_N^S$ . При взаимодействии сейсмической произвольной волны с подземным трубопроводом имеет место соотношение

$$\sigma_N = \sigma_N^S + \sigma_N^D, \quad (5)$$

где  $\sigma_N^S$  – определяется глубиной заложения трубопровода в грунте;  $\sigma_N^D$  – определяется как давление сейсмической волны.

При распространении продольной сейсмической волны параллельно к оси трубопровода нормальное напряжение  $\sigma_N^D$  приблизительно определяется по формуле

$$\sigma_N^D = K_\sigma \sigma_g, \quad (6)$$

где  $K_\sigma$  – коэффициент бокового давления грунта;  $\sigma_g$  – продольное сейсмическое напряжение в грунте при распространении продольных волн.

В случае сильных землетрясений в лёссовых грунтах ориентировочно значения  $\sigma_p^{\max} = 0.5$  МПа [10]. Тогда при  $K_\sigma = 0.3$  получим  $\sigma_N^{D\max} = 0.15$  МПа, согласно (6), что условно соответствует существенно большей глубине заложения трубопровода ( $H=7.5$  м). Следовательно, как видно, значение  $\sigma_N^{D\max}$  может даже превышать значение  $\sigma_N^S$ . Это показывает, что расчеты по динамической теории на сейсмостойкость подземных трубопроводов, без учета  $\sigma_N^D$ , весьма приблизительны. Главным отличием волновой теории от динамической является учет динамического нормального к внешней поверхности трубопровода напряжения  $\sigma_N^D$ .

### **Определение значения коэффициента взаимодействия через прочностные характеристики грунтов**

Как показано в [10], законы взаимодействия подземных сооружений с окружающей их грунтом являются локальными, следовательно, они могут быть определены на стандартных срезных приборах для испытания грунтов. При определении расчетным путем сейсмического напряженно-деформированного состояния подземных трубопроводов главную роль играют законы их взаимодействия с грунтом. При этом не менее важными являются достоверность и точность значений параметров, входящих в данные законы. В настоящее время отсутствуют целесообразные методы определения параметров законов взаимодействия. В [4, 5, 10] параметры законов взаимодействия определены из лабораторных и натуральных

экспериментов, где в опытах использованы отдельные виды грунтов и трубопроводов. Для широких разновидностей грунтов и ассортиментов трубопроводов, в расчетах на сейсмостойкость последних, используются очень приближенные значения параметров законов взаимодействия. Однако волновая теория позволяет более точно и достоверно определить значения параметров законов взаимодействия через прочностные характеристики грунтов [16].

Значения коэффициента взаимодействия  $K_x$ , в КМК 2.01.03-19 (далее КМК) определяется по следующей формуле:

$$K_x = \left( \alpha \frac{G_B}{100B} + \beta \right) \cdot 100, \quad (7)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты, зависящие от грунтовых условий и определяемые по табл. 4.2 КМК;  $G_B$  – вертикальное давление грунта на погонную длину труб, кН/м; определяется в зависимости от размеров труб, условий их укладки, глубины заложения, типа основания, вида грунта засыпки или насыпи;  $B$  – ширина траншеи при траншейной укладке трубопровода, м. Если трубопровод укладывается в насыпи, то необходимо брать  $B=D_H$ .

На основе вышеизложенного предлагается заменить в КМК формулу (7) следующей формулой волновой теории:

$$K_x = \frac{f}{u_*} \sigma_N + \frac{c}{u_*}, \quad (8)$$

где  $f$  – коэффициент внутреннего трения грунта;  $c$  – коэффициент сцепления грунта;  $u_*$  – предельное значения относительного смещения (смещение трубопровода относительно грунта), при котором разрушается структурная связь между частицами грунта;  $\sigma_N$  – суммарное нормальное (вертикальное) статическое давление грунта на трубопровод с учетом собственного веса трубопровода вместе с протекающим в нем продуктом.

Давление грунта определяется глубиной заложения  $H$  трубопровода от его верхней точки и радиуса трубопровода. Это давление соответствует давлению грунта на диаметрально плоскость трубопровода по его длине. Давление от собственного веса трубопровода также определяется как нормальное напряжение от веса трубопровода, включая вес протекающей в нем жидкости или газа, на диаметрально плоскость трубы.

В отличие от коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $G_B$ ,  $B$  в формуле (7) коэффициенты  $f$ ,  $C$ ,  $u_*$  известны для широкого класса разновидностей грунтов, что существенно повышает достоверность результатов расчетов на сейсмостойкость подземных трубопроводов.

Фактически из формулы (8) в частном случае составляется формула (7) КМК. При использовании формулы (8) необходимость в таблице 4.2 КМК отпадает. Далее определение продольных напряжений в подземных трубопроводах при действии сейсмических нагрузок проводится по КМК.

Преимуществом формулы (8) является ее точность, которая характеризуется точностью используемых стандартных прочностных характеристик грунта и удобства, так как эти характеристики различных разновидностей грунтов очень широко используются при расчетах. Динамическую составляющую нормального напряжения  $\sigma_N^D$  в расчетах по нормативному методу предлагается учитывать через коэффициент динамичности  $n_d$  в КМК.

**Заключение.** Проведен анализ существующих теорий сейсмостойкости подземных трубопроводов, показаны их преимущества и недостатки. Основным недостатком статической теории является неучет процесса взаимодействия подземного трубопровода с грунтом, а динамической теории – игнорирование динамических напряженных состояний грунта вокруг трубопровода.



Показана необходимость рассмотрения задач сейсмостойкости подземных трубопроводов на основе теории распространения и взаимодействия с подземными трубопроводами сейсмических волн в грунтовой среде, что является основой волновой теории сейсмостойкости подземных трубопроводов.

Приведена формула для включения в КМК по определению коэффициента продольного взаимодействия подземного трубопровода с грунтом при сейсмических воздействиях, которая основывается на общеизвестных прочностных характеристиках грунтов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] O'Rourke MJ, Liu X. Response of Buried Pipelines Subject to Earthquake Effects. MCEER, Univ. at Buffalo; 1999.
- [2] O'Rourke TD, Jeon S-S, Toprak S, Cubrinovski M, Hughes M, van Ballegooy S, et al. Earthquake Response of Underground Pipeline Networks in Christchurch, NZ. Earthq Spectra 2014. №30. P. 183–204.
- [3] Okamoto Sh. Introduction to Earthquake Engineering. University of Tokyo Press; 1973.
- [4] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
- [5] Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. – 152 с.
- [6] Ясин Э.М., Черников В.И. Устойчивость подземных трубопроводов. М.: Наука, 1967. – 120 с.
- [7] Айнбиндер А.Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1992. – 288 с.
- [8] Бородавкин П.П. Подземные магистральные трубопроводы. М.: Недра, 1982. – 384 с.
- [9] Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 года. Ташкент: Фан, 1971. – 672 с.
- [10] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. – 392 с.
- [11] КМК 2.01.03-19 Строительство в сейсмических районах / Минстрой РУз. Ташкент, 2019. –111 с.
- [12] Sultanov K.S., Vatin N.I. Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Pipelines // Applied Sciences. 2021. № 4. P. 1797.
- [13] Султанов К.С., Баходиров А.А. Законы сдвигового взаимодействия на поверхностях контакта твердых тел с грунтами // ОФМГ. 2016. № 2. С. 5–10.
- [14] Баходиров А.А., Султанов К.С. Волны в вязкоупругом стержне, окруженном грунтовой средой, при плавном нагружении // МТТ. 2014. № 3. С. 132–144.
- [15] Баходиров А.А., Исмоилова С.И., Султанов К.С. Динамическое деформирование контактного слоя при сдвиговом взаимодействии тела с грунтом // ПММ. 2015. Т.79. № 6. С. 839–852.
- [16] Султанов К.С. Параметры нелинейных законов взаимодействия подземных трубопроводов с грунтом // ОФМГ. 2022. №4. С.13–18.

Дата поступления  
19.11.2022

**Кумаков Ж.Х., Акбаров Н.А. Ер ости қувурларини зилзилабардошликка ҳисоблашнинг меъёрий усулларини такомиллаштириши**

**Аннотация:** Ер ости қувурларининг сейсмик мустаҳкамлигининг статик, динамик ва тўлқин назарияларини қисқача тахлили келтирилган. Уларнинг камчилик ва афзаллик томонлари кўрсатилган. Грунтларнинг мустаҳкамлик хусусиятлари кўрсаткичларида асосланган, ер ости қувурининг грунт билан ўзаро таъсири параметри  $K_x$  ни тўлқин назариясидан фойдаланиб аниқлаш усули кўриб чиқилган. Ушбу усулнинг афзаллик томонлари кўрсатилиб, уни ер ости қувурларидаги сейсмик бўйлама кучланишларни КМК усули орқали аниқлашда фойдаланишига тавсия этилган.

**Калим сўзлар:** ер ости қувури; грунт; сейсмик тўлқинлар; кучланишлар; деформациялар; ўзаро таъсир қонуллари.

**Kumakov J.Kh., Akbarov N.A. Improvement of regulatory methods of design of underground pipelines for seismic stability.**

**Abstract:** A brief analysis of existing static, dynamic, and wave theories of seismic resistance of underground pipelines is given. The disadvantages and advantages of the theories under consideration are shown. Methods for determining the interaction parameter  $K_x$  are discussed. A method to determine this parameter is considered based on the wave theory using the strength characteristics of soil. To determine the longitudinal stresses in soil, it is proposed to introduce into the normative method a formula for determining  $K_x$  through the strength characteristics of soils.

**Keywords:** underground pipeline, soil, seismic waves, stress, strain, laws of interaction.

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ $v_t-92$ СЕКУНДОВА И $k-\omega$ МОДЕЛИ МИНТЕРА К ЗАДАЧЕ ДОЗВУКОВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ

Маликов З.М.<sup>1</sup>, Наврузов Д.П.<sup>1</sup>, Хайдаров С.<sup>2</sup>, Абдухамидов С.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Андижанский машиностроительный институт, Андижан, Узбекистан

E-mail: malikov.z62@mail.ru, navruzov.d@mail.ru

**Аннотация:** В данной статье проводится исследование осесимметричной дозвуковой струи на основе современных моделей турбулентности. Данная задача, несмотря на простоту, является достаточно сложной проблемой для моделирования турбулентности. Поэтому многие современные модели RANS не в состоянии даже качественно описать такие задачи. Проведен сравнительный анализ моделей турбулентности Секундова  $v_t-92$  и  $k-\omega$  Минтера для затопленной осесимметричной дозвуковой струи. Для численной реализации задачи была использована неявная схема. Сравнительный анализ проводился для осевой скорости, продольных скоростей, поперечной скорости и для турбулентного напряжения. Полученные численные результаты сравниваются с результатами экспериментальных данных NASA. Показано, что модель турбулентности Секундова  $v_t-92$  более точно описывает турбулентное течение, чем модель турбулентности модели  $k-\omega$  Минтера.

**Ключевые слова:**  $k-\omega$  модель Минтера; модель турбулентности; осесимметричная струя; модель Секундова  $v_t-92$ ; число Рейнольдса; турбулентное напряжение.

**Введение.** Рассматриваемая задача имеет большое значение для авиационной и ракетно-космической техники. Поэтому исследованию различных струй, начиная с работ Прандтля, за последние 100 лет посвящено множества работ [1, 2]. Несмотря на многочисленное исследование, поставленную задачу нельзя рассматривать как полностью завершённой, т.к. она связана до сих пор не решённой проблемой турбулентности. Такие методы, как прямое численное моделирование [3, 4] (Direct Numerical Simulation (DNS)) и метод моделирования крупных вихрей [5] (Large Eddy Simulation (LES)), трудоёмкие и использование их для решения сложных инженерных задач аэродинамики требует применения высокоскоростных вычислительных машин. Поэтому их широкое практическое применение связано с развитием компьютерной техники и по оценкам специалистов может начаться лишь в конце нынешнего столетия. Поэтому в ближайшее время основным рабочим инструментом для решения прикладных задач аэродинамики будут оставаться все ещё полуэмпирические методы.

Несмотря на то, что до сегодняшнего дня разработано более 100 различных моделей турбулентности, универсальной модели турбулентности все ещё не существует. Это означает, что эти модели, удовлетворительно описывая один класс, не могут описывать качественно и другие. Во многих случаях при движении жидкости и газа возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва. Течение жидкости в окрестности такой поверхности называется струей. В зависимости от относительного направления движения струи могут быть спутными или встречными. Наиболее изучённым видом турбулентной струи является струя, распространяющаяся в покоящейся среде; такая струя называется затопленной [6]. В настоящей статье проведено сравнительное тестирование Секундова  $v_t-92$  и модели турбулентности  $k-\omega$  Минтера для осесимметричной дозвуковой струи [7–9]. Эта задача имеет два положительных свойства. Во-первых, она очень близка к реальным задачам расчёта дозвуковой струи в турбинах авиационных двигателей, а во-вторых, для неё существуют очень подробные экспериментальные данные [10].

### Основная часть. Математическая модель

**Модель Минтера  $k-\omega$  (SST)** представляет собой комбинацию  $k-\epsilon$  и  $k-\omega$  моделей турбулентности [8, 9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial z} + V \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + P - \beta^* \omega k, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial z} + V \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\gamma}{v_t} P - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial r}, \end{cases} \quad (1)$$

где вспомогательные функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
P &= \tau \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad \tau = \nu_t (2S), \quad S = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \nu_t = \frac{a_1 k}{(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad \varphi = F_1 \varphi_1 + (1 - F_1) \varphi_2, \\
F_1 &= \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500}{d^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{CD_{kw} d^2} \right], \quad CD_{kw} = \max \left( 2 \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r}, 10^{-20} \right), \\
F_2 &= \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500}{d^2 \omega} \right), \quad \Omega = \sqrt{2W * W}, \quad W = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\
\omega_{wall} &= 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta d)^2}, \quad k_{wall} = 0, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} K^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} K^2}{\sqrt{\beta^*}}.
\end{aligned}$$

Кроме вспомогательных функций, модель турбулентности Минтера имеет следующие эмпирические константы:  $\sigma_{k1}=0.85$ ,  $\sigma_{\omega 1}=0.5$ ,  $\beta_1=0.075$ ,  $\sigma_{k2}=1$ ,  $\sigma_{\omega 2}=0.856$ ,  $\beta_2=0.0828$ ,  $\beta^*=0.09$ ,  $K=0.41$ ,  $a_1=0.31$ .

**Модель Секундова  $\nu_t$ -92.** Модель Секундова  $\nu_t$ -92 относится к классу однопараметрических моделей турбулентности RANS. В основе данной модели лежит предположение о переносе вихревой структуры потока конвективным и диффузионным способами. Поэтому в этой модели для поиска турбулентной кинематической вязкости используется уравнение переноса субстанции. Многочисленные исследования этой модели показали, что она низкорейнольдсовая модель, которая способна описывать всю область течения, включая пристеночные слои. Первый вариант модели Секундова  $\nu_t$ -92 был предложен еще в 1992 г. и за прошедшие годы она была усовершенствована [7].

Система уравнений турбулентной осесимметричной струи с использованием модели Секундова в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial rv}{r \partial r} = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r(v + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\
\frac{\partial \rho \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j \nu_t)}{\partial x_j} = \rho(P_v - D_v) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho(v + C_0 \nu_t) \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho(-v + (C_1 - C_0) \nu_t) \right] \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j},
\end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } P_v = \rho C_2 A_2 (\nu_t \Gamma_1 + A_1 \nu_t^{4/3} \Gamma_2^{2/3}) + \rho C_2 F_2 A_2 N_1 \sqrt{(v + \nu_t) \Gamma_1} + \rho C_3 \nu_t \left( \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x_j \partial x_j} + N_2 \right),$$

$$D_v = \rho C_5 \nu_t^2 \Gamma_1^2 / a^2 + \rho C_4 \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \left| \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} \right| \right).$$

Здесь  $\nu$ ,  $\nu_t$  – молекулярная и турбулентная вязкость;  $a$  – скорость звука; угловые скобки представляют собой среднее по времени. Турбулентная вихревая вязкость определяется по формуле  $\mu_t = \rho \nu_t$ .

Другие термины, встречающиеся в приведенных выше уравнениях, определяются как:

$$F_1 = \frac{N_1 d_w + 0.4 C_8 \nu}{\nu_t + C_8 \nu + \nu_{t,w}}, \quad F_2 = \frac{\chi^2 + 1.3 \chi + 0.2}{\chi^2 - 1.3 \chi + 1.0}, \quad \chi = \frac{\nu_t}{7\nu}, \quad \Gamma_1 = \sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)},$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n} \right) + \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_m} \right)}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j}}, \quad N_2 = \sqrt{\frac{\partial N_1}{\partial x_j} \frac{\partial N_1}{\partial x_j}}.$$

$$A_1 = -0.5, \quad A_2 = 4.0, \quad C_0 = 0.8, \quad C_1 = 1.6, \quad C_2 = 0.1, \quad C_3 = 4.0, \quad C_4 = 0.35, \quad C_5 = 3.5, \quad C_6 = 2.9, \quad C_7 = 31.5, \quad C_8 = 0.1.$$

**Численный метод.** В большинстве случаев для численного исследования системы уравнений (1) и (2) использовались методы в двумерной постановке. Более того, для достижения необходимой точности вблизи стенки расчетная сетка в поперечном направлении сгущалась. Все это приводило к увеличению памяти требуемой программой и замедлению скорости расчета. Поэтому разработать численный алгоритм, не требующий больших вычислительных ресурсов, является актуальной задачей. Для численного исследования поставленной задачи используются система уравнений, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса в цилиндрической системе координат [1].

Для поставленной задачи введем обобщенную функцию тока  $\psi$ , для которой справедливы соотношения:

$$u = \frac{\psi \partial \psi}{r \partial r}, \quad v = -\frac{\psi \partial \psi}{r \partial x}. \quad (3)$$

здесь  $x, r$  – безразмерная продольная и радиальная координаты. Начальные и граничные условия для системы уравнений (1) и (2) ставятся стандартным образом [6].

Запишем систему уравнений (1) и (2) в переменных Мизеса [11] ( $x, r$ ) на  $(\xi, \eta)$ , где  $\xi = x/L$ . В новых переменных производные определяются по известным формулам:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (4)$$

**Результаты и обсуждение** конкретных примеров, иллюстрирующих кратко описанные выше свойства  $v_{r-92}$  модели Секундова и  $k-\omega$  модели турбулентности Минтера. На рис. 1 приведено сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными из безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла [10].

Из этого рисунка видно, что наиболее близкие результаты к опытными данным дают модели Секундова  $v_{r-92}$ . На рис. 2 показаны результаты турбулентных моделей и опытные данные из [10] для профилей безразмерных продольных скоростей в различных расстояниях от сопла.

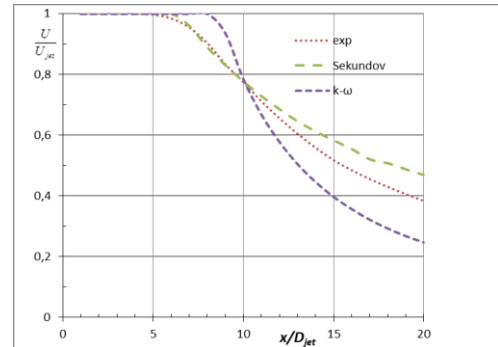


Рис. 1. Сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными для безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла

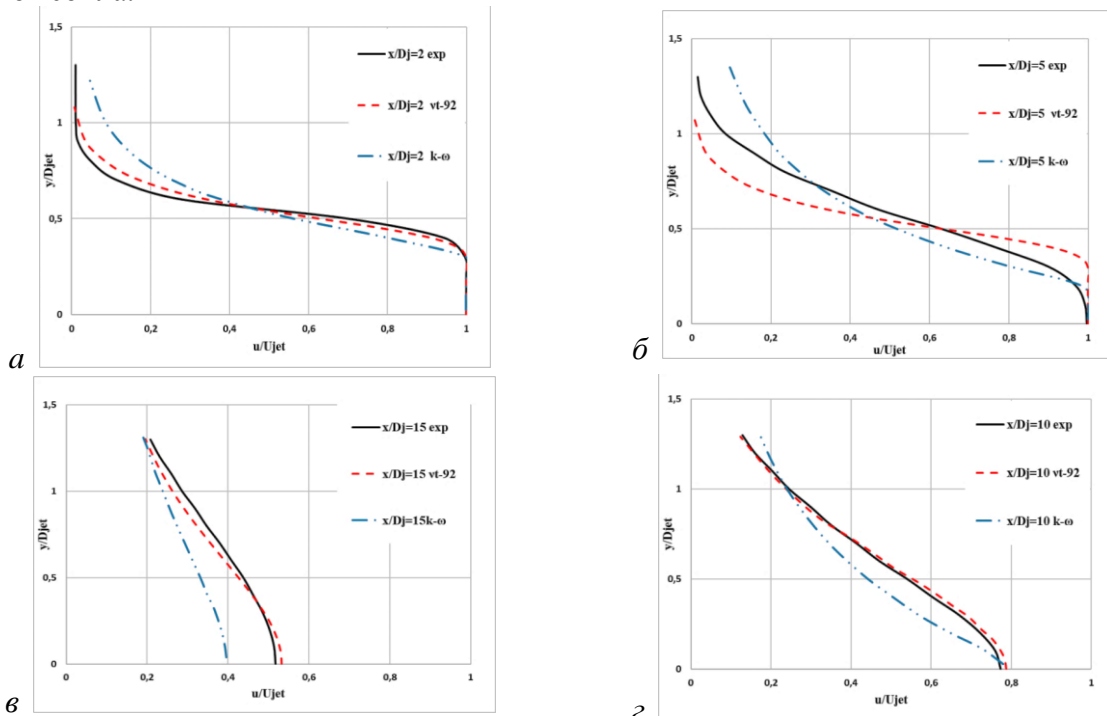


Рис. 2. Сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными [10] профилей продольных скоростей для различных сечений: а –  $x/D_{jet}=2$ ; б –  $x/D_{jet}=5$ ; в –  $x/D_{jet}=10$ ; г –  $x/D_{jet}=15$

На рис. 3 показано сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными [10] для профилей безразмерных поперечных скоростей в различных расстояниях от сопла.

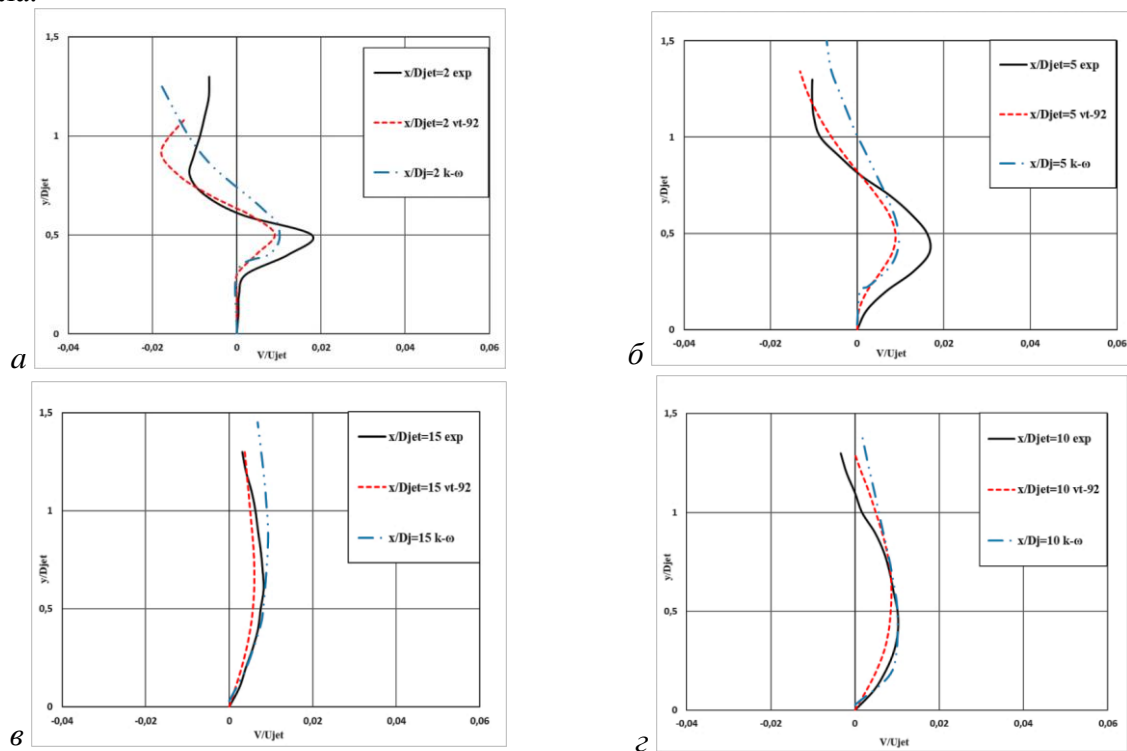


Рис. 3. Сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными [10] профили поперечных скоростей для различных сечений: *a* –  $x/D_{jet}=2$ ; *б* –  $x/D_{jet}=5$ ; *в* –  $x/D_{jet}=10$ ; *г* –  $x/D_{jet}=15$

На рис. 4 выведено сравнение результатов трех турбулентных моделей с опытными данными [10] для профилей турбулентного напряжения для различных сечений.

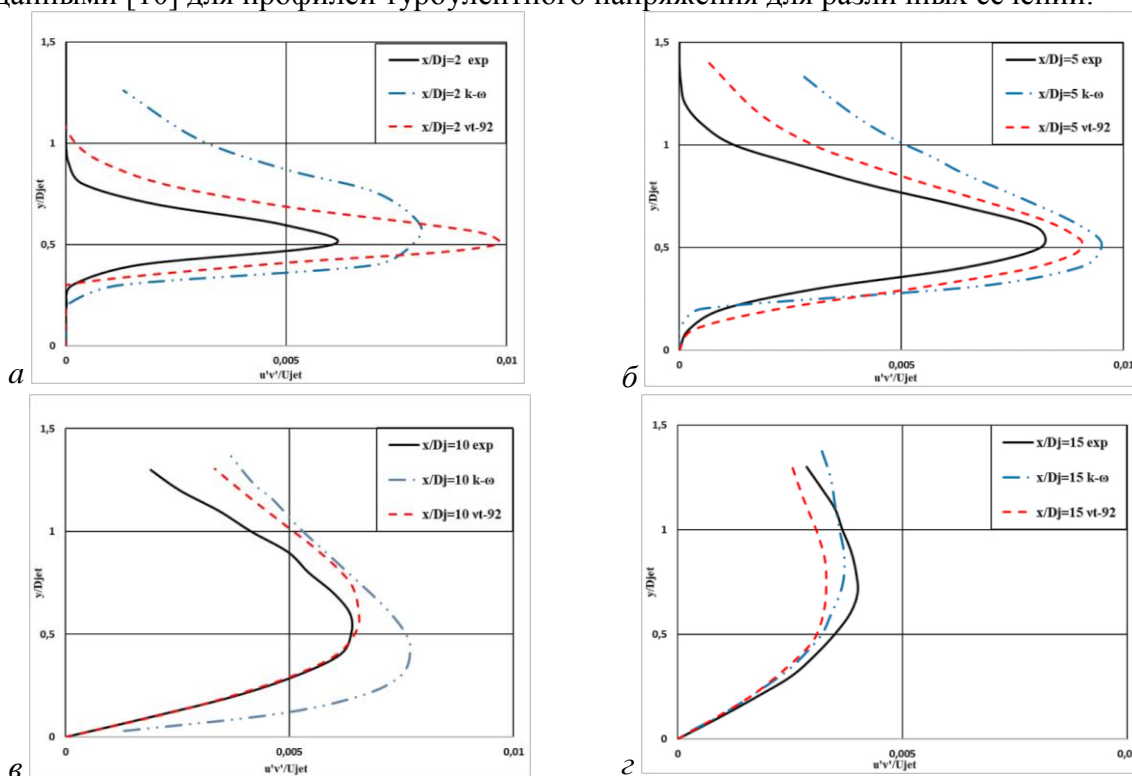


Рис. 3. Сравнение результатов турбулентных моделей с опытными данными [10] профили поперечных скоростей для различных сечений: *a* –  $x/D_{jet}=2$ ; *б* –  $x/D_{jet}=5$ ; *в* –  $x/D_{jet}=10$ ; *г* –  $x/D_{jet}=15$

Результаты, представленные на рис. 1 – 4 показывают, что и для профилей скорости и турбулентных напряжений лучшее соответствие наблюдается при использовании модели Секундова  $v_t-92$ .

**Заключение.** Проведено сравнительное тестирование модели Секундова  $v_t-92$  и  $k-\omega$  модели турбулентности Минтера с результатами экспериментов базы данных NASA. Показано, что модель Секундова  $v_t-92$  хорошо описывают турбулентную, струю на всех участках течения. Кроме того, модель Секундова  $v_t-92$  не страдает аномалией круглой струи по сравнению модели турбулентности  $k-\omega$  Минтера. Неудовлетворительные результаты наблюдаются у модели  $k-\omega$  в конечных участках. Таким образом, для расчета струйных потоков можно рекомендовать использовать модель турбулентности Секундова  $v_t-92$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов Е.М. Течения вязкой жидкости и модели турбулентности: методы расчета турбулентных течений. Санкт Петербург, 2010. – 127 с.
- [2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. – 840с.
- [3] Versteegh T.A., Nieuwstadt T.M. Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1997. Vol. 19. P. 135.
- [4] Юн А.А. Моделирование турбулентных течений. М.: 2010. – 349 с.
- [5] Peng S.H., Davidson L. Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2001., V. 22. P. 323.
- [6] Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967.
- [7] Шур М., Стрелец М., Зайков Л., Гуляев А., Козлов В., Секундов А. Сравнительное численное тестирование одно- и двух выравнивающих моделей турбулентности для течений с разделением и присоединением. AIAA Paper 95-0863. Январь 1995.
- [8] Menter F.R. Zonal Two-Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. AIAA Paper. 1993. № 93-2906.
- [9] Menter F.R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications. // AIAA J. 1994. Vol. 32, № 11. P.1299–1310.
- [10] Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center. <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
- [11] Malikov Z.M. Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids. // Applied Mathematical Modelling. 2020, V.82. 2020 - P. 409 – 436.

Дата поступления  
17.08.2022

**Маликов З.М., Наврузов Д.П., Хайдаров С., Абдухамидов С.А. Тovuш тезлигидан паст тезликдаги ўққа нисбатан симметрик якка струя масаласига Секундовнинг  $v_t-92$  ва Минтернинг  $k-\omega$  турбулентлик моделларини қўллашнинг натижаларини солиштириши**

**Аннотация:** Ушбу мақолада янги замонавий турбулент моделлар асосида товуш тезлигидан паст бўлган ўққа нисбатан симметрик оқим масаласи тадқиқ этилган. Ушбу масала ўзининг соддалигига қарамадан, кўпгина турбулент моделлар учун мураккаб масаладир. Шунинг учун кўпгина замонавий RANS моделлар бундай масалаларни ечишда ижобий натижаларни бермайди. Тўйдирилган товуш тезлигидан паст бўлган ўққа нисбатан симметрик масала учун Секундовнинг  $v_t-92$  ва Минтернинг  $k-\omega$  турбулент моделлари ишлатилди. Масалани сонли ечиш учун ошкормас схема қўлланилди. Таҳлилий солиштириши ўқдаги тезлик, қўндаланг тезлик, бўйлама тезлик ва турбулент кучланиши учун амалга оширилди. Олинган сонли натижалар NASA маълумотлар базасидаги натижалар билан солиштирилди. Олинган натижалар Секундовнинг  $v_t-92$  турбулент модели Минтернинг  $k-\omega$  турбулент моделига қараганда турбулентоқимни яхшироқ ифодалаши кўрсатилган.

**Калим сўзлар:**  $k-\omega$  Минтер модели; турбулентлик модели; ўққа нисбатан симметрия оқими; Секундов модели  $v_t-92$ ; Рейнольдс сони; турбулентлик кучланиши.

**Malikov Z.M., Navruzov D.P., Khaydarov S., Abdukhmidov S.A. Comparison of the results of application of the Secundov  $v_t-92$  turbulence model and Minter  $k-\omega$  model to the problem of a subsonic axisymmetric submerged jet**

**Abstract:** This article studies an axisymmetric subsonic jet based on modern turbulence models. This task, despite its simplicity, is quite a difficult problem for many turbulence models. Therefore, many modern RANS models are not able to describe such tasks qualitatively. A comparative analysis of the Secundov  $v_t-92$  and Minter turbulence models for a submerged axisymmetric subsonic jet is performed. An implicit scheme was used for the numerical implementation of the problem. A comparative analysis was conducted for axial velocity, longitudinal velocities, and transverse velocity and for turbulent stress; the numerical results obtained are compared with the results of NASA experimental data. It is shown that the Secundov turbulence model  $v_t-92$  describes the turbulent flow more accurately than the Minter turbulence model.

**Keywords:**  $k-\omega$  Minter model, turbulence model, axisymmetric jet,  $v_t-92$  Secundov model, Reynolds number, turbulent stresses.

**УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ И СООБЩЕНИЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ  
В УЗБЕКСКОМ ЖУРНАЛЕ «ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ» В 2022 Г.**

	<b>Номер журнала</b>
Bahadirov G.A., Rakhimova Z.A. Experimental study of the process of extraction of moisture from leather semi-finished products.....	2
Khusanov J., Berdiyarov A., Akhmatov A., Yusupova Z., Buranov J. On the motion control models of a two-link manipulator.....	2
Мамасолиев К., Синдаров Ж., Тошматов Э. Оценка внутренних силовых факторов в многослойных балочных плитах на упругом основании.....	1
Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б. Нелинейное деформирование и учет повреждаемости подземных трубопроводов при циклических нагрузениях.....	4
Агзамов М., Агзамов М.М. Расчеты тепло-массообменных процессов в сушильно-очистительном агрегате.....	3
Алимбабаева З.Л. Изменение механических свойств при дисперсионном твердении наплавленной стали 3Х2В8Ф.....	4
Алимухамедов Ш.П., Турсунов Н.К., Тоиров О.Т. Проблемы формирования шлака в индукционных тигельных печах.....	2
Ахмедов А.Б. Решение пространственных задач теории упругости в потенциалах напряжений.....	1
Бахадиров Г.А., Цой Г.Н., Набиев А.М. Экспериментальное исследование отжима капиллярно-пористого материала на металлокерамической опорной плите.....	3
Бердибаев М.Ж., Галиаскаров В.А., Нишонов Н.А., Рахимжонов З.К. Методика вибродиагностики типовых балочных железобетонных пролетных строений автодорожных мостов.....	4
Гайбулов Ю.Ш. Гидродинамическое давление на плунжер при эксплуатации нефтяных скважин глубинными насосами.....	3
Джураев А., Тураев Ф.Ф. Расчёт параметров составного питающего цилиндра зоны дискретизации прядильной машины.....	2
Доктору технических наук Зафару Маматкуловичу Маликову – 60 лет.....	2
Доктору технических наук, профессору Анвару Абдуллаевичу Ризаеву – 70 лет.....	3
Доктору физико-математических наук, профессору Батиржану Мардонову – 80 лет.....	2
Ибрагимов Ф.Х., Абзоиров О.Х., Примов Б.Х., Мухаммадиев Т.Д. Расчет малых колебаний междупильных прокладок линтерной машины.....	4
Исмоилова С.И., Султанов К.С., Хазратова Т.Я., Туланов Ш.Э. Проявление прочности текстильных нитей при высоких скоростях их движения.....	2
Исраилов М.Ш. Действие сейсмической волны на подземный трубопровод.....	3
Кенжабоев Ш., Махмудова Ш. Влияние упругого элемента подшипниковой опоры на упругую деформацию вала.....	3
Коршунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения задачи оптимизации траекторий в случае гравитационного поля Баррара.....	2
Кумаков Ж.Х., Акбаров Н.А. Совершенствование нормативных методов расчета подземных трубопроводов на сейсмостойкость.....	4
Маликов З.М., Мадалиев М.Э., Шоев М.А. Сравнение численных схем для задачи ламинарного течения во внезапно расширяющемся канале.....	3
Маликов З.М., Наврузов Д.П., Хайдаров С., Абдухамидов С.А. Сравнение результатов применения модели турбулентности $vt-92$ Секундова и $k-\omega$ модели Минтера к задаче дозвуковой осесимметричной затопленной струи.....	4
Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Омонов З.Ж., Абдухамидов С.К. Численное исследование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двух-жидкостной модели турбулентности и модели Уилкокса.....	1
Мардонов Б.М., Мирзаев И., Хожметов Г.Х. Теоретические значения параметров взаимодействия подземного трубопровода с грунтом.....	3
Мардонов Б.М., Нишонов Н.А., Бердибаев М.Ж. Колебания балки на взаимодействующих с грунтом опорах при действии подвижных нагрузок.....	2
Матчанов Р.Д., Йулдашев А.Т., Кулдошев Д.А., Джураева Н.Б. Повышение эффективности работы комбинированной ХУМ в вертикально-шпиндельном исполнении.....	1
Миралимов М.Х., Усмонов Д.Т., Каршибоев А.И. Расчет сводчатой конструкции транспортного городского тоннеля.....	4
Мирзаев И., Ювмитов А. С., Турдиев М.С. Влияние вертикальных колебаний на сдвиговые колебания зданий на скользящем фундаменте при землетрясении.....	4
Мирсаидов М.М., Сидиков М.Х., Туражонов К.М. Динамика ротора с учетом эксцентricности и угловой погрешности шарового автобалансирующего устройства.....	4

Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Маллаев О.С., Жамолова Л.Ю. Исследование машинного агрегата семяотводящего устройства пильного джина с вращающимся шнеком.....	1
Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Примов Б.Х., Маллаев О.С., Жамолова Л.Ю. Расчет движения семян внутри рабочей камеры пильного джина.....	2
Мухаммадиев Д.М., Ахмедов Х.А., Примов Б.Х., Маллаев О.С., Жамолова Л.Ю. Расчет технологических показателей семяотводящего устройства пильного джина с шелушильной камерой.....	3
Наврузов Д.П. Численный анализ вихревых течений после внезапного расширения трубы с различными диаметрами.....	1
Норкузиев О.С. Расчётная оценка захвата и нагружения долек хлопка шпинделями горизонтально-шпиндельного хлопкоуборочного аппарата.....	4
Парпиев А., Мардонов Б., Наврузов Н., Якубов К. Моделирование процесса движения сырцового валика по поверхности переднего фартука камеры джина.....	4
Раупов Ч.С., Шермухамедов У.З., Маликов Г.Б. Экспериментальные исследования линейной и нелинейной ползучести керамзитобетона при сжатии и растяжении.....	4
Рахимов Ф.Р. Определение опорных сил реакции подающего механизма многооперационной машины.....	2
Ризаев А.А., Йулдашев А.Т., Кулдошев Д.А., Мирзаева М.М., Ганжаев Ш.А. Разработка модели и расчет производительности хлопкоуборочных машин.....	3
Ризаев А.А., Худайкулиев Р.Р., Джураева Н.Б. Расчет кинематических параметров эпициклического вращения шпинделя в рабочей камере уборочного аппарата.....	2
Рихсиева Б.Б. Моделирование поведения грунтов при продольном движении подземного трубопровода в одномерной постановке.....	4
Рустамов К.Ж., Алимухамедов Ш.П., Комилов С.И. Анализ точности перемещения рабочего органа одноковшового экскаватора.....	3
Сагдиев Х.С., Тешабаев З.Р., Галиаскаров В.А., Шерниёзов Х.О., Мирзакабилов Б.Н. Экспериментальные исследования подземных полиэтиленовых труб при действии динамических (типа сейсмических) нагрузок с применением метода центробежного моделирования.....	3
Сагдиев Х.С., Тешабаев З.Р., Галиаскаров В.А., Ювмитов А.С., Шерниёзов Х.О., Мирзакабилов Б.Н. Экспериментальные исследования подземных полимерных труб при температурных воздействиях на центробежной установке.....	2
Сидиков М.Н., Косимов Ш.С. Динамический анализ движений регулятора скорости.....	3
Сирожиддинов З. Особенности определения несущей способности забивных свай.....	1
Султанов К.С., Исмаилова С.И., Хазратова Т.Я. Нелинейные законы деформации хлопковой пряжи.....	3
Султанов К.С., Хусанов Б.Э., Рихсиева Б.Б. Распространение сдвиговых волн в грунтах при взаимодействии подземных трубопроводов с грунтом.....	4
Тошболтаев М., Артикбаев Б., Мирзабдуллаев Х. Выбор рациональных параметров посевного овощеводческого агрегата на базе специализированного трактора ТТЗ-100SP.....	3
Тухтакузиев А., Расулжонов А. Обеспечение равномерности глубины обработки почвы почвообрабатывающими машинами.....	2
Убайдуллаева Д.Х., Шумкорова Ш.П., Абдурахимова М.М., Бегманова И.А. Физико-механический свойство нового футерного трикотажа.....	1
Умархонов С.И., Норматов Ш.И., Хайдарова О.М. Методики определения параметров кругло-цилиндрической поверхности скольжения и оценки устойчивости грунтовых откосов.....	1
Уразмухамедова З., Жураев Д., Маткаримов П. Определение собственных частот и форм колебаний плотин.....	1
Усаров М.К. Совершенствование бимоментной теории толстых ортотропных пластин.....	4
Халджигитов А.А., Джумаёзов У.З. Численное решение задачи теории упругости в деформациях.....	3
Халджигитов А.А., Тилолов О.У. Численное решение плоской задачи теории упругости в напряжениях.....	2
Хамдамов М.М., Ширинов З.З. Математическое моделирование процессов в цилиндрической камере сгорания в программном пакете Ansys Fluent.....	4
Ходжабеков М.У. Нелинейные колебания упругого стержня с жидкостным гасителем.....	1
Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А., Аминов Х.Х. Численный метод решения задачи о газодинамическом состоянии рельефного участка магистрального газопровода с переменной площадью поперечного сечения.....	4
Хужаёров Б.Х., Сайдуллаев У.Ж., Шадманов И.Э. Осесимметричная задача фильтрования суспензии с образованием упругопластического кейк-слоя.....	2
Хусайнов Р. Б. Колебания подземных трубопроводов при нелинейном взаимодействии с грунтом.....	1
Эргашев Ш.Т., Рустамов Р.М., Турдалиев В.М., Юлдашев М.А. Теоретическое исследование перемещения семян мелкосеменных овощных культур по наклонному лотковидному семяпроводу.....	4
Эсанов А.А., Акрамов А.А. Результаты исследований по выбору параметров установки форсунки на цилиндрической мешалке.....	1



## СОДЕРЖАНИЕ

М.М. Мирсаидов, М.Х. Сидиков, К.М. Туражонов. Динамика ротора с учетом эксцентricности и угловой погрешности шарового автобалансирующего устройства.....	3
К.С. Султанов, Б.Э. Хусанов, Б.Б. Рихсиева. Распространение сдвиговых волн в грунтах при взаимодействии подземных трубопроводов с грунтом.....	12
А. Абдусаттаров, Н.В. Рузиева. Нелинейное деформирование и учет повреждаемости подземных трубопроводов при циклических нагрузениях.....	19
М.К. Усаров. Совершенствование бимоментной теории толстых ортотропных пластин.....	32
М.Х. Миралимов, Д.Т. Усмонов, А.И. Каршибоев. Расчет сводчатой конструкции транспортного городского тоннеля.....	43
И. Мирзаев, А.С. Ювмитов, М.С. Турдиев. Влияние вертикальных колебаний на сдвиговые колебания зданий на скользящем фундаменте при землетрясении.....	49
М.Ж. Бердибаев, В.А. Галиаскаров, Н.А. Нишинов, З.К. Рахимжонов. Методика вибродиагностики типовых балочных железобетонных пролетных строений автодорожных мостов.....	55
Б.Б. Рихсиева. Моделирование поведения грунтов при продольном движении подземного трубопровода в одномерной постановке.....	64
Ч.С. Раупов, У.З. Шермухамедов, Г.Б. Маликов. Экспериментальные исследования линейной и нелинейной ползучести керамзитобетона при сжатии и растяжении.....	72
И.К. Хужаев, Х.А. Мамадалиев, Х.Х. Аминов. Численный метод решения задачи о газодинамическом состоянии рельефного участка магистрального газопровода с переменной площадью поперечного сечения.....	83
М.М. Хамдамов, З.З. Ширинов. Математическое моделирование процессов в цилиндрической камере сгорания в программном пакете Ansys Fluent.....	90
А. Парпиев, Б. Мардонов, Н. Наврузов, К. Якубов. Моделирование процесса движения сырцового валика по поверхности переднего фартука камеры джина.....	99
Ш.Т. Эргашев, Р.М. Рустамов, В.М. Турдалиев, М.А. Юлдашев. Теоретическое исследование перемещения семян мелкосеменных овощных культур по наклонному лотковидному семяпроводу.....	103
О.С. Норкузиев. Расчётная оценка захвата и нагружения долек хлопка шпинделями горизонтально-шпиндельного хлопкоуборочного аппарата.....	109
З.Л. Алимбабаева. Изменение механических свойств при дисперсионном твердении наплавленной стали 3X2B8Ф.....	116
Ф.Х. Ибрагимов, О.Х. Абзоиров, Б.Х. Примов, Т.Д. Мухаммадиев. Расчет малых колебаний междупильных прокладок линтерной машины.....	120
Ж.Х. Кумаков, Н.А. Акбаров. Совершенствование нормативных методов расчета подземных трубопроводов на сейсмостойкость.....	125
З.М. Маликов, Д.П. Наврузов, С. Хайдаров, С.А. Абдухамидов. Сравнение результатов применения модели турбулентности $v_t-92$ Секундова и $k-\omega$ модели Минтера к задаче дозвуковой осесимметричной затопленной струи.....	130

## МУНДАРИЖА

М.М. Мирсаидов, М.Х. Сидиков, К.М. Туражонов. Роторларни эксцентриситетли айлана бўйлаб ҳаракатланадиган шарчалар ёрдамида балансирлаш динамикасини баҳолаш.....	3
К.С. Султанов, Б.Э. Хусанов, Б.Б. Рихсиева. Ер ости қувурларининг грунт билан ўзаро таъсирида грунтларда силжиш тўлқинларининг тарқалиши.....	12
А. Абдусаттаров, Н.В. Рузиева. Циклик юкланиш таъсиридаги ер ости қувурларининг ночизикли деформацияси ва шикастланиши.....	19
М.К. Усаров. Қалин ортотроп пластиналарнинг бимоментли назариясини такомиллаштириш.....	32
М.Х. Миралимов, Д.Т. Усмонов, А.И. Каршибоев. Шаҳар транспорт тоннелининг гумбазли конструкциясини ҳисоблаш.....	43
И. Мирзаев, А.С. Ювмитов, М.С. Турдиев. Зилзила пайтида сирпанувчи пойдеворли биоларнинг силжишига вертикал тебранишларнинг таъсири.....	49
М.Ж. Бердибаев, В.А. Галиаскаров, Н.А. Нишинов, З.К. Рахимжонов. Автомобил кўприкларининг тўсинли темирбетон оралик қурилмаларини вибродиагностика услуби.....	55
Б.Б. Рихсиева. Ер ости қувурининг бўйлама ҳаракатида грунтдаги жараёни бир ўлчовли моделлаштириш.....	64
Ч.С. Раупов, У.З. Шермухамедов, Г.Б. Маликов. Керамзитобетоннинг сиқилиш ва чўзилишдаги чизикли ва ночизикли салқилигини экспериментал тадқиқоти.....	72
И.К. Хужаев, Х.А. Мамадалиев, Х.Х. Аминов. Диаметри ўзгарувчан бўлган магистрал газ қувури рельефли қисмининг газодинамик ҳолати масаласини ечишнинг сонли усули.....	83
М.М. Хамдамов, З.З. Ширинов. Цилиндрик камерада ёниш жараёнларини ANSYS Fluent пакет дастури орқали математик моделлаштириш.....	90
А. Парпиев, Б. Мардонов, Н. Наврузов, К. Якубов. Пахта хомашё валигининг жин ишчи камераси олд фартук юзасида ҳаракатланиш жараёнини моделлаштириш.....	99
Ш.Т. Эргашев, Р.М. Рустамов, В.М. Турдалиев, М.А. Юлдашев. Майда уруғли сабзавот экинлари уруғларини нов шаклидаги уруғ ўтказгичдаги кўчишларини назарий тадқиқи.....	103
О.С. Норқўзиев. Горизонтал-шпинделли пахта териш машинаси шпинделларининг пахта толасини илиб олиш ва юкланишини ҳисобий баҳолаш.....	109
З.Л. Алимбабаева. 3X2B8Ф эритмали пўлатни дисперсион қотишдаги механик хоссаларини ўзгариши.....	116
Ф.Х. Ибрагимов, О.Х. Абзоиров, Б.Х. Примов, Т.Д. Примов. Линтер машинаси арраларо қистирмаларнинг кичик тебранишларини ҳисоблаш.....	120
Ж.Х. Кумаков, Н.А. Акбаров. Ер ости қувурларини зилзилабардошликка ҳисоблашнинг меъёрий усулларини такомиллаштириш.....	125
З.М. Маликов, Д.П. Наврузов, С. Хайдаров, С.А. Абдухамидов. Товуш тезлигидан паст тезликдаги ўққа нисбатан симметрик яқка струя масаласига Секундовнинг $v_t-92$ ва Минтернинг $k-\omega$ турбулентлик моделларини қўллашнинг натижаларини солиштириш.....	130

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 28.12.2022  
Сдано в набор 01.12.2022. Подписано в печать 28.12.2022.  
Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Гарнитура Times New Roman. Ризография.  
Усл.- печ. л. 16.27. Уч.-изд. л. 9.58. Тираж 130. Заказ № 688.  
Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:  
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.